キューネン 数学基礎論講義

ケネス・キューネン著
藤田博司訳

The Foundations of Mathematics

Kenneth Kunen

日本評論社

はしがき

この本の基になっているのは，ウィスコンシン大学マディソン校の大学院向け数理論理学の初級講座のために用意したノートです．たくさんの学生たちが，間違いをはっきりリストアップしてくれたり，あるいは文章のどこかが理解しにくいと暗に知らせてくれたりして，これらのノートの改善に貢献してくれました．著者として，この学生たちに感謝したいと思います．

上述の講座もこの本も，集合論，モデル理論，再帰理論への手引とするためのものです．集合論とモデル理論についてはゼロから書き起こしてあって，これらの分野の標準的なテキストの書き方の路線をおおむね踏襲しています．はじめに集合論を論じます．そうすることで，次のモデル理論の章でレーヴェンハイム-スコーレム定理やコンパクト性定理を証明するにあたって基数計算やツォルンの補題を利用できるようにしました．モデル理論の章には，集合論のモデルのことも題材として入っています．これには，Δ_1 の絶対性とか，モデル $HF = H(\aleph_0)$（これは ZFC の公理のうち無限の公理を除くすべてをみたす）や $H(\aleph_1)$（こちらは冪集合の公理を除くすべての公理をみたす）の分析も含まれます．独立性証明（たとえば連続体仮説の ZFC からの独立性）はこの本では扱いませんが，それらの証明を理解するために必要なモデル理論と集合論における予備知識のすべてが本書から得られます．

再帰理論の書き方だけは少々奇抜に見えるかもしれません．基本となる "計算可能" と "決定可能" とを "HF 上で Δ_1" と定義しています．これは論理学者の間ではよく知られたアプローチですが，初級の教科書ではあまり採用されません．ここでこのアプローチを採用した理由は二つあります．一つ目の理由は，集合論に応用する場合にこれが一番有効だからです．これなら，計算可能な概念が絶対的であることはまったく明らかですから．二つ目の理由は，受講生のうちの少なからぬ人たちが，再帰理論をある程度，学部の授業あるいは大学院の論理学コースの授業で，学んでいたことです．抽象機械についてゼロから詳細に説明したのでは，受講者の半分近くにとって，

ひどく退屈な授業になってしまったことでしょう．かといって，それらを予備知識として仮定してしまうと，残り半分の受講者が置いていかれます．つまり “HF 上で Δ_1” は，受講者の大半にとって新奇な形で “計算可能” ということのきちんとした定義を与える方法なのでした．

目次

第0章
導入

0.1　予備知識

読者が学部レベルの基本的な数学をわかっているものと仮定します．詳しくいうと：

群とか体といった抽象的な数学的構造について思考することが平気でないといけません．また，微分積分の基本のところと，その背後にある理論のいくらかを知っているべきです．たとえば，極限値のきちんとした定義とか，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ が不可算である一方で有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ が可算であるという事実，などです．

初歩的な数学で利用されているような論理の基本についても知っているべきです．これはたとえば，ブール代数の真理値表のことや，次のセクションに要約しておいた，数学における日常言語の長い表現を短縮して書くための論理の使い方のこと，などです．

0.2　述語論理

数学の普段の叙述は，日常言語と論理的記法のインフォーマルな混合を用いてなされます．論理的記法はなんら「深遠な」ものではなく，場合によっては明確さを増してくれる（けれども増してくれないこともある）便利な略記法というにすぎません．論理的記法についてのフォーマルな研究である**述語論理学**について第 II 章で扱いますが，そこへ到達するより前にも論理的記法を頻繁に用いることになるので，ここでもお話ししておくのです．

実数について話しているとき，

$$\forall x\,[\,x^2 > 6 \to [\,x > 2 \vee x < -2\,]]$$

と論理的記法で書くこともあるでしょうし，あるいは，すべての x について，もし $x^2 > 6$ なら $x > 2$ または $x < -2$ だ，と日常言語で言うこともあるでしょう．

論理的記法では，$\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$ という命題演算子を，それぞれ，日常言語の「または」「かつ」「〜ではない」「ならば」「必要十分」を略記するために用いています．それに，$\forall x$ とか $\exists x$ という**量化子**を，日常言語の「すべての x について」と「ある x があって」を略記するために用いています．

量化子を用いるさいには必ず，変数のとりうる値の全体である**言及の範囲**，またの名を**宇宙**が何であるかを心にかけていなければなりません．上の例の場合，$\forall x$ と記号的に書き，あるいは「すべての x について」と日常言語で書いたとき，それが「すべての実数 x について」という意味であると理解されたわけです．この例ではさらに，$x \mapsto x^2$ といった函数や $<$ などの関係に言及しており，それがこの言及の範囲においていかなる意味をもつものかも，あらかじめわかっているものとされています．6 とか ± 2 とかいったオブジェクトがこの言及の範囲に存在することも仮定されています．

「$\exists! y$」は「ある y がただ一つあって」をつづめて書いたものです．実数全体を言及の範囲とすれば，

$$\forall x\,[\,x > 0 \to \exists! y\,[\,y^2 = x \wedge y > 0\,]] \tag{$*$}$$

が真となります．これはつまり，どの正の実数も正の平方根を一つだけもつ，ということです．実数のかわりに有理数全体を宇宙とした場合，$(*)$ が偽となります．

この $\exists! y \varphi(y)$ は $\exists y\,[\,\varphi(y) \wedge \forall z\,[\,\varphi(z) \to z = y\,]]$ という長い表現と同値になりますので，$\exists!$ を使わずに済ませることも可能です．しかし一意性を言明することは数学ではごく普通のことですから，手短に書く方法があれば便利なのです．

言明 $(*)$ は自由変数をもたない言明，すなわち**文**ですから，宇宙が与えられれば $(*)$ が真か偽のどちらかに決まります．この表現の一断片である $\exists! y\,[\,y^2 = x \wedge y > 0\,]$ は一つの**論理式**であり，自由変数 x をめぐるある主張になっています．与えられた宇宙において，これは x のある値について真

であっても他の値については偽でありえます．たとえば $\mathbb{R}$ においては，3 について真，-3 については偽となります．

数学の叙述においては量化子が省略されることがよくあります．そのときは，読者がそれらを補って読まねばなりません．たとえば $\mathbb{R}$ において交換律 $x \cdot y = y \cdot x$ が成立するというとき，実は $\forall x, y\,[x \cdot y = y \cdot x]$ という主張をしているのです．方程式 $ax + b = 0$ が（$a \neq 0$ であるかぎり）必ず $\mathbb{R}$ で解けるというとき，実は

$$\forall a, b\,[a \neq 0 \to \exists x\,[a \cdot x + b = 0]]$$

という主張をしているのです．アルファベットのはじめから a と b をとり，終りのほうから x をとって，$\forall a, b$, $\exists x$ とするというのも，すでに知っているとおりです．論理学に重点を置いている本書では，量化子を普段よりきちんと書くように心がけています．

参照の便宜のために，命題演算子 $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$, $\leftrightarrow$ の通常の真理値表を掲げておきましょう．

表 1　真理値表

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

〔訳注：ここにあらわれた $\varphi \vee \psi$ や $\varphi \wedge \psi$ などのように文字を命題演算子 $\vee, \wedge, \neg, \to, \leftrightarrow$ で結びつけて組み立てられる記号表現のことを本書では**ブール表現**と呼びます．ブール表現は文字（ブール変数）に与えられた F または T の真理値をもとに，表 1 の真理値表に従って計算される F または T の値（ブール値）をもちます．また，複数の命題を命題演算子で結びつける操作のことをブール演算と呼びます．〕

数学ではいつでも $\varphi \to \psi$ が $\neg\varphi \vee \psi$ と同値であることに注意しましょう．たとえば，$7 < 8 \to 1 + 1 = 2$ と $8 < 7 \to 1 + 1 = 2$ はいずれも真となります．日常言語で「ならば」と表現されはするものの，$7 < 8$ という事実と $1 + 1$ の値との間には「因果的連関」はありません．また数学では「または」

が排他的に使われることがないことにも注意してください．つまり，φ と ψ のどちらか一方か両方が真のときに $\varphi \vee \psi$ が真になります．これは日常言語の「ライスまたはパンがつきます」とは様子が違います．

真理値表から明らかなとおり，命題演算子 $\vee$ と $\wedge$ と $\leftrightarrow$ は結合律をみたします．つまり，これらのうちの一つを $\odot$ と書いたとき，$\varphi \odot (\psi \odot \chi)$ と $(\varphi \odot \psi) \odot \chi$ とは同じ真理値をもつことになります．記号で書くときでも日常言語で書くときでも，連言記号 $\wedge$ のまわりのカッコを省いて $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ と書くことがよくあります．選言記号 $\vee$ についても同様です．ただし，$\varphi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$ は（φ, ψ, χ のうち 1 つまたは 3 つが真のとき真になる）$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)$ ではなくて，（φ と ψ と χ がすべて真またはすべて偽であるときに真になる）$(\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\psi \leftrightarrow \chi)$ を意味するものとします．たとえば $\mathbb{R}$ について語っているときに，$x > 0 \leftrightarrow x^3 > 0 \leftrightarrow x^5 > 0 \leftrightarrow x^7 > 0$ と，同値性をひとつながりに書いてしまえるわけです．

0.3　なぜこの本を読むべきか

本書は，集合論，モデル理論，証明論，再帰理論について，その基本のところを書いています．これらはすべて，数理論理学と呼ばれるものの一部をなしています．そうしたものを読もうとする理由として，次の三つが考えられます．

（1）　論理学への入門として．

（2）　位相数学，解析学，代数学，人工知能研究，データベース研究への応用のため．

（3）　数学の基礎が哲学に関係しているため．

（1）　数理論理学を研究するつもりであれば，この分野のもっと進んだ内容を理解するために，本書の題材が必要です．

（2）　数学のどの分野にせよ，不可算集合を取り扱うさいには，集合論が入り用になります．モデル理論は代数学と密接に関わっています．決定可能性をめぐる問いは数学でもコンピュータ科学でも頻繁にあらわれます．それに，人工知能やデータベースに関する計算機科学の分野では，モデル理論や証明論の用語がよく使われます．

（3）　この本で論じる数学基礎論というテーマをめぐっては哲学的な問題が多数あります．哲学に関心があろうとなかろうと，これがいろいろなトピックの結びつきを示すよい方法になっているので，まずそれについて話しましょう．さらなる哲学的覚え書きは，サブセクション I.7.2 と第 III 章にあります．

0.4　数学の基礎

数学の基礎には**公理論的方法**が関わってきます．数学においてはまず公理を書き下し，その公理から定理を証明するのです．公理の正当性の問題（なぜ興味を引くのか，なぜなんらかの意味で真であるのか，なぜ研究するに値するのか）は，動機づけ，物理，あるいは哲学の部分であって，数学の一部にはなりません．数学そのものは公理からの論理的演繹でできています．

公理論的方法の例を三つあげます．そのうち二つはすでに高校か大学初年級の数学でお馴染のはずのものです．

例 1：幾何学　測量や建築などにおける幾何学の「利用」は有史以前に遡るもので，おそらくはそれぞれの文明において独自に発展していたことでしょう．その公理論的な基礎づけは（知られている限りでは）紀元前 5 世紀から紀元前 3 世紀にかけて古代ギリシャでなされ，紀元前 300 年ごろにユークリッドによって詳しく書き記されました．ユークリッドは『原論』（[24]）において，公理のリストを示し，定理を公理から導いてみせました．公理のリストは複雑なうえ，本書の主題とは無縁ですから，ここで紹介するのはよします．公理のうちの一つ（第 I 巻公準 1）は，異なる 2 点はただ 1 本の直線を定める，というものです．もちろんユークリッドはこれを英語や日本語で言ったわけではなくギリシャ語で書いたのですが，セクション 0.2 の要領で，わたくしたちはこれを論理的記法で

$$\forall x, y\,[[\,\mathrm{Point}(x) \wedge \mathrm{Point}(y) \wedge x \neq y\,] \\ \rightarrow\ \exists! z\,[\,\mathrm{Line}(z) \wedge \mathrm{LiesOn}(x,z) \wedge \mathrm{LiesOn}(y,z)\,]]$$

のように言うこともできます．ここで意図された言及の範囲すなわち宇宙は，幾何図形の全体ということになりそうです．

例 2：群論　群の「着想」は，置換と代数方程式に適用されたのが最初で，1800 年ごろ（ルフィニ 1799 年，アーベル 1824 年，ガロア 1830 年）に遡れます．公理論的な扱いはケイリー（1854 年）によるものとされています（[12]，第 8 巻参照）．群論の公理はシンプルでもあり，またこの先で例として有用になってくるので，ここでリストを掲げることにしましょう．**群**とは，

$$\gamma_1 :\ \forall x, y, z\,[\,x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\,],$$

$$\gamma_2 :\ \exists u\,[\,\forall x\,[\,x \cdot u = u \cdot x = x\,] \wedge \forall x \exists y\,[\,x \cdot y = y \cdot x = u\,]\,]$$

という二つの公理からなる公理系 $GP = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ の**モデル** $(G, \cdot)$ のことです．いいかえれば，G は集合で $\cdot$ は $G \times G$ から G への函数であって G 上で γ_1 と γ_2 が成立するようになっているものです．ここでは「$\forall x$」は「$\forall x \in G$」のことですから，G が言及の範囲あるいは宇宙ということになります．公理 γ_1 は結合律です．公理 γ_2 は，単位元 u が存在し，各 x は $xy = yx = u$ をみたす逆元 y をもつ，と言っています．モデルと公理についてのもっとフォーマルな議論は第 II 章に出てきます．

この公理系から定理が証明されます．たとえば，群の公理系は消約律を含意します．このことを $GP \vdash \forall x, y, z\,[\,x \cdot y = x \cdot z \to y = z\,]$ と書くことにします．この改札ゲートのような記号 $\vdash$ は「証明できる」と読むのです．

ケイリーは群の公理系を日常言語で述べたのですから，ここでのフォーマルな提示の仕方がケイリーの著作そのままの引用だなんてわけはありません．この提示法はむしろ 19 世紀後半から 20 世紀初頭の数理論理学と集合論に影響されたものです．それ以前は，公理系といえばギリシャ語なり英語なり日本語なりの自然言語で述べられるものでしたし，証明はただ「普通の推論」によって与えられるだけでした．証明とは厳密にいうと**何なのか**は，フォーマルに分析されることがなかったのです．このことは数学のたいていの部分に現在でもあてはまります．日常言語の表現を略記するために論理記号を多用していても，たいていの数学書では，証明が正当かどうかは，フォーマルな分析などしなくとも，読めばわかるものだと想定しています．それでも，数学基礎論では，数学的言明とは何であるか，また数学的証明とは何であるか，ということの精密な定義を与えねばなりません．これをわたくしたちはモデル理論と証明論を扱う第 II 章で論じます．

フォーマルな分析を通じて，**シンタクス**（構文論）と**セマンティクス**（意

味論）の区別が明瞭になってきます．公理系 GP は**述語論理**の二つの**文**の集合です．述語論理はちょうど C とか Java とか TEX とか html のようなコンピュータ言語と同じく，厳格な形成（フォーメーション）の規則をもつフォーマルな言語（形式言語）です．そして，フォーマルな証明とは，このフォーマルな言語の文をきちんと定義された一定の推論規則に従って並べた文の有限列のことです．推論規則の一例をあげれば，**モーダス・ポーネンス**（セクション II.10 参照）は $\varphi \to \psi$ と φ から ψ を導き出してよいというものです．このように，述語論理の文とかフォーマルな証明とかいったものはシンタクス的なオブジェクトです．定義さえきちんと与えてしまえば，公理系 GP からの消約律のフォーマルな証明が本当に存在することを示すのは難しくありません（演習問題 II.11.11 参照）．

セマンティクスすなわち意味論でいう「意味」とは群などの**構造**のことです．シンタクスとセマンティクスは完全性定理（II.12.1）で関連づけられます．これは，$GP \vdash \varphi$ であることと，すべての群が φ をみたすことが同値だと主張するものです．

完全性定理より先はモデル理論と証明論という二つの分野に話が分かれます．証明論はフォーマルな証明の仕組みをより深く探求し，モデル理論は第一にセマンティクスに重きを置いてモデルの数学的構造を調べます．モデル理論に関する例として，G をある無限な群としましょう．すると，G には可算無限な部分群 $H \subseteq G$ があります．また任意の $\kappa \geq |G|$ に対して，サイズが κ の群 $K \supseteq G$ があります．こうした言明を証明するのは，**集合論さえ知っていれば**簡単な代数学の演習にすぎません．本書の第 I 章を読めばできるようになります．

実のところ，これらの言明は，群論ではなくモデル理論に属するものです．というのも，これらはどんな理論のモデルにも適用できるレーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理（II.16.6 と II.16.7）の特別な場合にすぎないからです．上のような H と K はさらに G において真であるようなすべての 1 階の性質をみたすようにとれます．たとえば G が非アーベル群なら H も K もそうなるようにできます．アーベル群であることとか 3-可除（$\forall x \exists y\,[yyy = x]$）であることなど他の性質についてもそうです．上記の定理の証明は「1 階の性質」というものの定義をも含めてモデル理論（第 II 章）

に属するものですが，証明には集合論で得られる基数をめぐる議論が用いられます．こうして第3の例に行きつきます．

例3： 集合論　無限集合の理論の基本的な仕事は1880年代から1890年代にかけてカントールによってなされましたが，集合の概念自体は，とくに有限集合のそれは，ずっと前に登場しています．集合論は本書の最初のトピックなので，すぐに不可算集合についてたくさんの事柄を知っていただけることと思います．カントールは公理論的方法によらず素朴に議論しましたけれども，そうした素朴な議論が矛盾を引き起こす可能性には気づいていました．公理論的なアプローチは1908年にツェルメロの[63]で初めてなされ，続いてフレンケルとフォン・ノイマンによって改良され，こんにちの *ZFC* 公理系（セクションI.2参照）となりました．これが現在，集合論の「標準的」な公理系とされています．

《哲学的覚え書き》モデル理論ではフォーマルな論理の文の**どんな**リストでも（つまらないものかもしれませんが）なんらかの理論の公理系をなすものとしますが，「公理」という言葉が数学に適用された場合，そこでは**信念の表明**と**定義のための公理**の2とおりの用法をもちます．一つ目の用法は辞書に載っている「自明の理」とか「明らかに真であるがゆえに証明を要しない命題」という定義に近いものです．二つ目の用法は代数学でおなじみのものです．代数学では「群の公理」「環の公理」「体の公理」などなどについて語りますから．

先ほどの三つの例で考えてみましょう．

例1についての古典ギリシャ的観点： 公理は**信念の表明**です．すなわち，公理は現実の物理的空間についての明らかに真な事実であり，それらから，他の真ではあっても明らかとはいえない事実を導き出すことができます．ですから，ユークリッドの幾何学を学ぶことは，現実世界の幾何を学ぶということです．意図された言及の範囲は一つに固定されています．それは物理的なこの宇宙の幾何図形の全体と考えることができるでしょう．もちろんプラトンが指摘したとおり「完璧な」直線とか三角形とかいったものは抽象的な理想界にしか存在できないのですが，ユークリッドの幾何学が現実世界の幾何的な問題の解決に安心して応用できることを疑う人はありませんでした．

例 2 についてのすべての人の観点：これらは**定義のための公理**です．この公理系はべつだん深遠な「普遍的真理」をとらえているわけではなくて，ただある有用な構造のクラスを定義するためのものにすぎません．群は数学の多くの分野にごく自然に登場するので，その特徴をカプセル化して定理を証明しておくことが考えられたのです．群論は群一般の研究であって特定の一つの群の研究ではありません．言及の範囲はそのとき議論の対象になっている群ということになります．

例 2 に対するこの見方は群論が始まってこのかた変化したことがないのですが，幾何学観のほうは発展してきました．まず，アインシュタインによって指摘されたとおり，ユークリッドの公理系は現実の世界では真ではないので，現実の空間に適用すると正しくない結果を生じることになります．それに，近年の幾何学の応用は公理論的にはなされない場合がほとんどです．3 次元空間は集合 $\mathbb{R}^3$ のことだと定められ，その上にいろいろの計量（距離の計り方）を考えます．ユークリッド式の計量もその一つで，これが現実の世界に近似的に（厳密にではなく）対応していると考えるのです．したがって，現代の観点からは幾何学は特定のある幾何の研究ではなく**いろいろな幾何**の研究であり，ユークリッドの公理系は単なる「定義のための公理」に，つまり平坦な幾何を記述する方法の一つに，格下げされてしまいました．

例 3 についての 20 世紀中頃までの古風な観点：これらは信念の表明です．*ZFC* は万物の理論（セクション I.4）です．現代数学は，群，環，体，幾何，ベクトル空間エトセトラ，さまざまな公理系のるつぼのようです．第 I 章で見るとおり，これらすべては集合論の中へ吸収してしまえます．そこで，ひとたび *ZFC* を前提として受け入れてしまえば，あとは何の仮定を置く必要もなく，定義して定理を証明すればよいのです．*ZFC* で考えるときには，わたくしたちは群とは γ_1 と γ_2 をみたす積をともなった**集合** G であると言います．積演算は G 上に定められた 2 変数函数ですが，函数というのもまたある種の（順序対の）**集合**なのです．幾何学を研究しようと思うなら，距離空間がすでによくご存じの条件をみたす距離函数 d をともなった**集合**であることも知っておきましょう．距離 $d(x, y)$ は実数です．実数の全体は一つの集合 $\mathbb{R}$ を形成しますが，あとで述べるようにこの集合は *ZFC* の中である集合論的な手順を踏んで構成されるものです（定義 I.15.4）．

集合論がすべての基礎であるからこそまずそれを勉強するのです．そしてまた，その議論を通じて無限基数についての専門的な諸結果が生まれ，抽象度の高い数学の数々の分野で有効に用いられます．とりわけ第 II 章のモデル理論においてこうした結果が必要になります．また解析学でもトポロジーでも代数学でも重要であることが本書のいろいろな演習問題から見てとれることでしょう．第 I 章では ZFC の公理を正確に言明しますが，たいていの数学書の例にもれず，証明はインフォーマルです．第 II 章に入ると，GP と ZFC を特に関心のある例として，いろいろな公理系についてフォーマルな証明を見てゆきます．

セクション I.2 で ZFC の公理系のリストを示します．少々長いリストなのですが，第 I 章を読み終えるころには，それぞれの公理の意味していることや，なぜその公理が大切であるのかを理解できます．公理間の相互関係についても第 I 章で手短かにコメントしますが，これについての詳細は [36, 41] などの集合論の教科書で扱われています．ZFC がすべての問題を解決するわけではないこともあって，公理間の相互関係は決して単純ではありません．とりわけ注目すべきことに，ZFC は連続体仮説 CH の真偽を決められません．連続体仮説というのは，$\mathbb{R}$ の不可算部分集合はみな $\mathbb{R}$ と同じサイズであるという主張です．

例 3 についての現代的な観点：これらは定義のための公理です．集合論は ZFC のモデルの研究です．たとえば $2^{\aleph_0} = \aleph_5$ であるモデル，つまり可算と $\mathbb{R}$ のサイズの間に $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4$ とちょうど 4 つの無限濃度があるような集合論のモデルが存在します．第 I 章を読み終えるころには，CH とか $\aleph_n$ とかいうものが厳密にはどういうものなのかを理解していることでしょうが，このようなモデルについては示唆するにとどめます．

第 IV 章は再帰理論の紹介です．またの名をアルゴリズムと計算可能性の理論といいます．たいていの人はコンピュータを使ったことがあるでしょうから，**アルゴリズム**のインフォーマルな概念はご存じですね．次にあげる集合は，お好みのプログラミング言語（それがそれなりにまっとうな言語であったとして）で，要素であるかどうかの判定プログラムを書けるという意味で，明らかに決定可能です：

（1） 素数全体の集合，

（２）ZFC の公理全体の集合，

（３）構文的に正当な C 言語のプログラム全体の集合．

つまり，数なり記号表現なりを入力したときにそのデータがこれらの集合の要素であるかどうか答えてくれるプログラムは，効率のことを気にしなければ，たやすく書くことができます．(1)の場合は，入力された整数 $x>1$ に対して，それが $x>y>1$ をみたすある整数 y で割り切れるかどうかをチェックします．(2)の場合は有限な記号表現が入力されたとして，それがセクション I.2 で示した公理のリストにあるかどうかを見ます．(3)のタスクはもっと厄介で，まず C 言語の正確な定義を知るために言語マニュアルを参照しなければなりませんが，それでも C コンパイラは他のたくさんのことに加えてこのタスクをやりとげています．

より深遠な結果になると，なんらかの集合が決定可能で**ない**ことの証明に関連してきます．たとえば，

（４）いつか計算が完了して停止するような C プログラムの全体，

（５）$\{\varphi : ZFC \vdash \varphi\}$

などの集合がそうです．つまり，集合論の言語の文 φ を読み込んで $ZFC \vdash \varphi$ であるかどうかを答えてくれるようなプログラムは**存在しない**のです．インフォーマルな言いかたでは「数学的真理の全体は決定不能である」ということです．(5)が決定不能であることは数学基礎論に関係ある話であることは確かなので，このことは定理 IV.5.8 としてきちんと述べ，証明します．プログラミング言語についての議論はインフォーマルな例示にとどめ，「決定可能性」の正確な定義としてはプログラムというものに一切言及しないものを採用します．しかし定理 IV.2.2 を証明したあとで（プログラミングに詳しい人のために）この定理からどうして(4)の決定不能性が導かれるのかを説明します．

ところで ZFC は無矛盾でしょうか？（これは，$\varphi \wedge \neg\varphi$ という形の文が一つも ZFC から証明されないだろうか，という意味です．）多くの集合論研究者は，ZFC は数学で普通に用いられる諸原理を定式化しているだけだから，無矛盾であろうと推定していますが，すべての哲学者がこの考えを買ってくれるわけではありません．そうした哲学的な問題が第 III 章で論じられます．ところが，わたくしたちは一つの数学的事実としてゲーデルの第二不完全性

定理（定理 IV.5.32）を証明します．この定理から，ZFC の無矛盾性は「初等的方法」によっては証明できない，ということが導かれます．実際 ZFC が無矛盾であるかぎりその無矛盾性は ZFC の公理だけを用いた議論では証明できないのです．

仮に ZFC が矛盾を含むのであれば，$\{\varphi : ZFC \vdash \varphi\}$ がすべての文の集合と一致することになるので(5)は実際は決定可能ということになってしまいます．この集合の決定不能性の結果（定理 IV.5.8）は，本当は ZFC の無矛盾性を仮定しているのです．これと同様に，先ほどの $2^{\aleph_0} = \aleph_5$ をみたす ZFC のモデルが存在するという結果も，ZFC が無矛盾であるという前提で述べられています．そうでないとしたら，そもそも ZFC のモデルが存在しません．

0.5　どのようにこの本を読むべきか

数学書というものは，小説のように読むものではありません．面白いと思う場所へすぐに飛んでいってかまいません．わからなくなればいつでも戻って来られるのですから．第 III 章ではそれに先立つ章の専門用語を少しばかり用いていますが，哲学に関心のある読者はすぐにでも第 III 章を読み始めればよいのです．

演習問題は各章の末尾に集めずに，途中にちりばめられています．演習問題と補題の違いはやや不明瞭です．演習問題のなかにもヒントとして証明の概略を示したものがあり，補題のなかでも証明が「明らかなはず」であるものは証明をつけずに述べてあります．すべての演習問題を解く読者はあまりいないでしょう．いくつかの演習問題を，後のセクションで補題として利用しますが，いつでも必要になれば戻って来ればよいのですから，問題を解かずに進んでも実害はありません．

第I章
集合論

I.1　方針

ここでは公理について論じ，その意味するところを日常言語で解説し，これらの公理から全数学を導き出せることを示しましょう．といっても，この章に数学のすべてが含まれているわけではもちろんありません．そうではなくて，集合論の公理から，数，函数，濃度といった基本概念がどのように展開できるのかをこの章で示します．ひとたびこれが済めば，数学のそれ以外の部分が普通の数学の教科書にあるとおりに行えるのです．

こうした基本概念のほかに，無限基数 $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$ を用いた計算がどのようになされるのかも述べることにします．

I.2　公理

参照の便宜のためにすべての公理のリストをいまここで書き出してしまいますが，この章の終わりにたどり着くまでは，そのすべての意味が理解できることはないでしょう．二つの二項関係 $=$ と $\in$ をもつ述語論理を用いてお話しします．

インフォーマルには，この理論の宇宙は**遺伝的集合** x の全体，すなわち x が集合であり x の要素がすべて集合であり，また x の要素の要素もすべて集合であり，以下同様であるような集合 x の全体のなすクラスです．集合論の公理のこのツェルメロ-フレンケル流の定式化では，真クラス（たとえばわたくしたちの言及の範囲など．27 ページ参照）は存在しません．ここで言及の範囲として意図されているものについては，セクション I.6 と I.14 でもコ

メントしています.

フォーマルには，当然のことながら，述語論理の文のリストを一つお示しするだけです．どの公理もすべての自由変数を全称量化した状態で述べられていると考えてください.

公理 0.　集合の存在

$$\exists x(x = x)$$

公理 1.　外延性

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$$

公理 2.　基礎

$$\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \land \neg\exists z(z \in x \land z \in y))$$

公理 3.　内包公理図式　y を自由変数として含まない論理式 φ ごとに，

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \land \varphi(x))$$

公理 4.　対

$$\exists z(x \in z \land y \in z)$$

公理 5.　和集合

$$\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \land Y \in \mathcal{F} \to x \in A)$$

公理 6.　置換公理図式　B を自由変数として含まない論理式 φ ごとに，

$$\forall x \in A \exists! y\, \varphi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B\, \varphi(x, y)$$

以降の公理は定義済みの概念をいくつか用いて書いたほうがよほど簡単になります．公理 1, 3, 4, 5 のもとで，$\subseteq$（部分集合），$\emptyset$ または 0（空集合），S（順序数の後続者函数），$\cap$（共通部分），それから述語 SING(x)（x は単元集合である）を次のように定義しましょう：

$$x \subseteq y \iff \forall z(z \in x \to z \in y)$$
$$x = \emptyset \iff \forall z(z \notin x)$$

$$
\begin{aligned}
y = S(x) &\iff \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x) \\
w = x \cap y &\iff \forall z(z \in w \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y) \\
\mathrm{SING}(x) &\iff \exists y \in x \forall z \in x(z = y)
\end{aligned}
$$

公理 7.　無限

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$$

公理 8.　冪集合

$$\exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$$

公理 9.　選択

$$\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \;\to\; \exists C \forall x \in F(\mathrm{SING}(C \cap x))$$

☛ ZFC ＝ 公理 1 から公理 9 まで

☛ ZF ＝ 公理 1 から公理 8 まで

☛ ZC および Z は，それぞれ ZFC と ZF から公理 6（置換）を除いたもの

☛ Z^-, ZF^-, ZC^-, ZFC^- は，それぞれ Z, ZF, ZC, ZFC から公理 2（基礎）を除いたもの

初等数学のほとんどは（おおむねツェルメロの理論に相当する）ZC^- の中でなされます．置換公理があれば $\aleph_\omega$ 以上のサイズの集合を作ることができますし，整列順序をフォン・ノイマン式順序数で表現することもできます．数学においてフォン・ノイマン式順序数が絶対に必要というわけではありませんが，書き方という点では有用です．

基礎の公理は関係 $\in$ が整礎であると言っています．いいかえれば，空でない集合は必ず $\in$ に関して極小な要素 y をもつということです．これによって，$a \in b \in a$ をみたす集合 a とか b は排除されます．数学を展開するうえでは基礎の公理はまったく必要とされません．

定義された概念を含む論理式は $\in$ と $=$ だけを用いて書かれた論理式の略記とみなします．たとえば $\subseteq$ のような定義された述語の場合は，その定義された述語を定義そのものに（必要ならば変数名の変更をほどこしたうえで）置

き換えてやれば，省略のない論理式が得られます．そこで，冪集合の公理は

$$\forall x \exists y \forall z \bigl(\forall v (v \in z \to v \in x) \to z \in y\bigr)$$

の略記だったことになります．定義された函数の場合は量化子を増やさなければなりません．無限の公理は

$$\exists x \bigl[\, \exists u (\forall v (v \notin u) \land u \in x) \\ \land \forall y \in x \exists u (\forall z (z \in u \leftrightarrow z \in y \lor z = y) \land u \in x) \bigr]$$

の略記です．ここでは u が $S(y)$ に等しいということを主張する式を $\psi(y,u)$ として $\exists u(\psi(y,u) \land u \in x)$ という式に $S(y) \in x$ を置き換えたわけです．フォーマルな論理における定義された概念のよりフォーマルな扱いについてはセクション II.15 を見てください．

等号 $=$ の性質は論理の事実の範疇にあり，理論の公理化にさいして改めて宣言するに及ばないという，今日の代数学や論理学の申しあわせに，わたくしたちも従うことにしましょう．たとえば，外延性の公理の逆 $x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ は論理的に真，つまり $\in$ に限らずすべての二項関係について真なのです．セクション 0.4 で群の公理を書き下したときも，群の積に特有の公理 γ_1 と γ_2 だけをリストに載せました．どんな二項演算についても成立する $=$ についての事実である $\forall x, y, z\,(x = y \to x \cdot z = y \cdot z)$ といったものは，群の公理のリストには入れてありません．

フォーマルな言語のほとんどの流儀で，宇宙が空でない（$\exists x(x = x)$）という言明も論理の事実とみなされます（第 II 章，とりわけ覚え書き II.8.16 を参照）．それでもわたくしたちはこれを公理 0 として明記して，起こりうる混乱を防ぐごとにしました．というのも，空な位相空間のように，空な構造をも認めるような数学的概念の定義もたくさんあるからです．

言及の範囲として**どのようなものが意図されているのか**を忘れて，公理が単に何らかの空でない領域上の何らかの二項関係について何ごとかを主張していると見ることも可能です．ある公理から他の公理が導き出されるかどうかを調べようとするとき，この観点が有用になってきます．たとえば次の演習問題の (2) によって，公理 2 が公理 1，公理 4，公理 5 から出てこないことがわかります．

演習問題 I.2.1　領域 D と，その上の二項関係 E を

（1）　$D = \{a\}$;　$E = \emptyset$.

（2）　$D = \{a\}$;　$E = \{(a, a)\}$.

（3）　$D = \{a, b\}$;　$E = \{(a, b), (b, a)\}$.

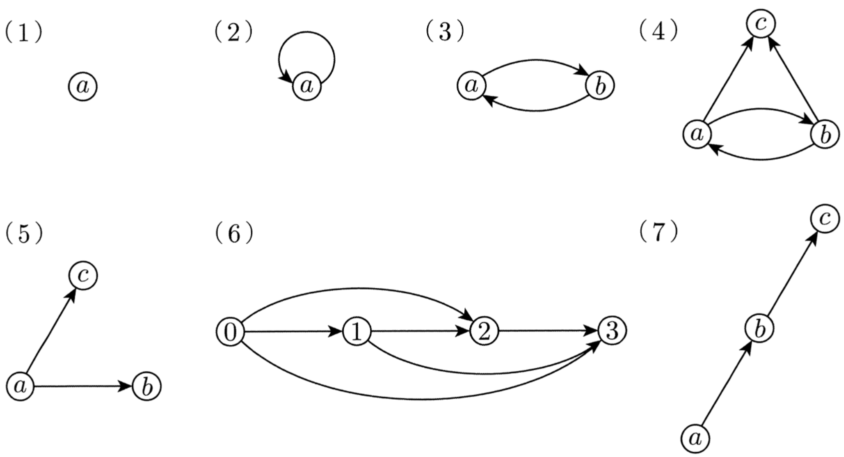
（4）　$D = \{a, b, c\}$;　$E = \{(a, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$.

（5）　$D = \{a, b, c\}$;　$E = \{(a, b), (a, c)\}$.

（6）　$D = \{0, 1, 2, 3\}$;　$E = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

（7）　$D = \{a, b, c\}$;　$E = \{(a, b), (b, c)\}$.

のように与えたとして，それぞれにおいて公理 1, 2, 4, 5 のどれが真になるだろうか.



[ヒント]　E を有向グラフとして表示することがしばしば有用です．グラフの頂点 x から頂点 y への矢印があるときに x は y の**子**であるといいます．たとえば(4)の c の子は a と b です．これで視覚的にチェックできる公理もあります．たとえば外延性の公理は二つの異なる頂点が全体としてまったく同じ子たちをもつことはない（たとえば(5)の b と c のような状況になることがない）という意味になります．対の公理は，二つの頂点（同じものでもよい）x と y をどのようにとってもそれらを子とする頂点 z がかならずある，という意味です．このことは(2)では真，それ以外では偽であることが見てとれるでしょう．□

ここで示したような有限モデルはさしあたり物珍しさの種でしかありませ

ん．ところが，一般に無限のモデルを用いる方法は，集合論における独立性証明すべての背景にあります．たとえば，ZFC のモデルのなかには連続体仮説 CH が真であるモデルもあれば，偽であるモデルもあります．[36][41] 参照．

I.3　叙述についての二つの注意点

注意 I.3.1　集合論であれ幾何学であれ何であれ，公理論的な数学の展開を論じるにあたっては，

→ フォーマルな議論：定義，定理，証明など．

→ インフォーマルな議論：動機づけ，図示，哲学など．

この両者を注意深く区別せねばなりません．インフォーマルな議論は，定理や証明を理解する助けにはなりますが，どうしても必要なものというわけではなく，数学の一部分というわけでもありません．本書を含むたいていの数学書では，いろいろな定理の証明の間に，インフォーマルな議論がさしはさまれています．本書では，フォーマルな議論はセクション I.6 の中ほどから始まります．

注意 I.3.2　数学の「基礎」について論じようというのですから，本書での集合論の叙述は他の多くのテキストにあるものとは少し違ったものになります．群論や微積分の初歩の本では，普通は読者のみなさんが本のテーマについて何も知らないという前提で，基本的なことから出発し，中間レベルの結果を通過して昇ってゆき，最後に最も高度な結果へと至ります．ところが集合論は全数学の基礎だけあって，読者のみなさんはすでに中間レベルの結果をすべてよくご存じです．これはたとえば，$\mathbb{R}$ が無限集合であることとか，$\{7,8,9\}$ がサイズ 3 の有限集合であることなどです．ですから，本書では，本当に基本的な事項と，高度な事項とにフォーカスします．基本的な事項というのは，公理の意味を論じたり，3 とか $\mathbb{R}$ とかいうものが実際のところ**何であるのか**を公理にもとづいて説明する，といったことを含みます．高度な事項のほうには，不可算集合のいろいろの性質が含まれます．たとえば $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ と可算無限次元空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ がいずれも同じサイズであることなどです．基本の部分を論じるときには，動機づけの説明に中間レベルの例を利

用することにします．たとえば函数の性質を例示するのに微積分の時間に学んだ実数値函数を用いたりします．こうした例示は注意 I.3.1 でいうインフォーマルな議論と考えなくてはなりません．ただし，初級微積分の内容をわたくしたちの公理系からいかにして導き出せるかを理解した後になれば，これらの例示をフォーマルな議論の一部と解釈しなおすことができます．

I.4　万物の理論としての集合論

動機の説明の一環として，どうして集合論が数学の基礎であるのか，という話から始めます．みなさんは集合論の重要さをご存じでしょうが，集合論が**最重要**であることはご存じでないかもしれません．これは

→ すべての抽象的数学的概念は集合論的である，

→ すべての具体的数学的オブジェクトは特定の集合である，

という意味です．

抽象的な概念はすべて集合論に帰着します．例として函数の概念を考えてみましょう．インフォーマルには函数というのは（たとえば函数 $y = x^2 + 1$ といったように）x に y を対応させる方法を特定するものですが，「函数」の厳密な定義をするために，わたくしたちは函数をそのグラフと同一視してしまいます．すなわち，f が函数であるとは，f が集合でその要素はどれも順序対であり，しかも

$$\forall x, y, z\,[\,(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \to y = z\,]$$

が成立していることをいいます．順序対とは何かということがわかれば，これは厳密な定義になります．

インフォーマルには順序対 (x, y) とは x と y に一意的に対応づけされた「もの」です．フォーマルには，クラトフスキが 1921 年に [42] でやってみせたように $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ と定めます．公理論的なアプローチにおいてはまず公理がこの集合の構成を可能にしてくれるかどうかを検証し，また $ZFC \vdash$「一意性」かどうかを検証する必要があります．つまり

$$ZFC \vdash \forall x, y, x', y'\,[\,(x, y) = (x', y') \to x = x' \wedge y = y'\,]$$

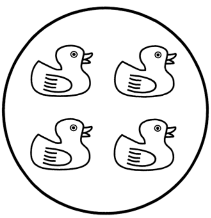
となるかどうかです．演習問題 I.6.15 を見なさい．次に，群というものもある種の対 $(G, \cdot)$ で，この $\cdot$ は $G \times G$ から G への一つの函数です．$G \times G$

は G の要素の順序対全体のなす集合です．このようにすべてを集合と対と函数の言葉で説明でき，これらはすべて集合に帰着します．これについては後ほど公理の展開に伴なってより詳しく論じることにします．

具体的オブジェクトの例としては 0, 1, 2, $-2/3$, π, e^{2i} などの個別の数をあげましょう．インフォーマルには 2 は「二性」(twoness) という概念——一つの個物と他のもう一つの個物を含みそれらがすべてであること——を表示するものです．これを $two(x) \leftrightarrow \exists y, z\,[\,x = \{y, z\} \wedge y \neq z\,]$ のように定義することもできるでしょうが，正式には論理式でなくて特定の集合として 2 というオブジェクトを定めたいところです．フォーマルには，二つの要素をもつ特定の集合を一つ選んでそれを 2 と呼びます．フォン・ノイマンの流儀で $2 = \{0, 1\}$ としましょう．このときもちろん，0 が特定のゼロ個の要素からなる集合すなわち空集合 $\emptyset$ であることと，また 1 が $\{0\} = \{\emptyset\}$ という一個の要素だけからなる特定の集合であることとが，知られている必要があります．そこで $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ということになり，今や $two(2)$ を検証することができます．

自然数全体の集合は $\mathbb{N} = \omega = \{\,0, 1, 2, 3, \cdots\}$ です．ここでもちろん $3 = \{0, 1, 2\}$，$4 = \{0, 1, 2, 3\}$ です．ω が手に入れば $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ といった集合を普通どおりに構成できます．これらの構成についてはセクション I.15 でかんたんに触れますが，詳細は解析学の教科書に委ねることにします．みなさんは，$\mathbb{Q}$ が可算だが $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ はそうではないということを，きっともうご存じでしょう．

I.5　数えること



集合論を理解する基本は，数え方を学ぶことにあります．アヒルの集合 $\mathcal{D}$ を数えるには，アヒルを一列に並べて，アヒルが尽きるまで順に自然数とのペアを作っていきます．



0　1　2　3

ここではアヒルたちと自然数 $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ の要素たちがペアを組んだので，4 羽のアヒルがいるとわかります．このことを $|\mathcal{D}| = 4$ と書きます．

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を数えるには，自然数の集合 $\mathbb{N} = \omega$ 全体を使わなくてはなりません．$\mathbb{Q}$ が有限でないからです．$\mathbb{Q}$ に自然数全体とペアを組ませる，よくある方法の一例を示せば，次のとおりです：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1/1 & -1/1 & 1/2 & -1/2 & 2/1 & -2/1 & 1/3 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

このことを $|\mathbb{Q}| = \omega = \aleph_0$ と書くのです．$\aleph_0$ は最初の無限基数です．ここで示した $\mathbb{Q}$ の数えあげでは，各 n ごとに $0, 1, \cdots, n$ を用いて書ける有理数をすべて確実に数えあげてから，$0, 1, \cdots, n, n+1$ を用いて書ける有理数の数えあげに進みます．

さて，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は**不可算**なのですが，これは（数えられないという意味ではなく）ただこの集合を数えようとすれば小学校で学んだ数の範囲を超えて進まねばならないという意味です．もしも ω 個の実数からなるリスト $L_\omega = \{ a_0, a_1, a_2, \cdots \} \subseteq \mathbb{R}$ をどんな風にでもとったとすれば，リストから漏れた実数が必ずあるということを，カントールは示しました．しかし $\mathbb{R} \setminus L_\omega$ から実数を選ぶことを妨げるものは何もありませんから，そのような実数 a_ω をとれば，$L_{\omega+1} = \{ a_0, a_1, a_2, \cdots, a_\omega \}$ が得られます．これでもまだリストから漏れた実数があるので，実数 $a_{\omega+1} \in \mathbb{R} \setminus L_{\omega+1}$ を選ぶことができ，$L_{\omega+2} = \{ a_0, a_1, a_2, \cdots, a_\omega, a_{\omega+1} \}$ が得られます．つまりわたくしたちは**順序数**

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots,\ \omega+\omega,\ \cdots,\ \omega_1,\ \cdots$$

を用いて数え続けることができるのです．一般に $L_\alpha = \{ a_\xi : \xi < \alpha \}$ とおき，これがまだ $\mathbb{R}$ 全体に一致しないなら $a_\alpha \in \mathbb{R} \setminus L_\alpha$ を選び，このことを $\mathbb{R}$ 全体をリストし尽すまで続けるのです．

各順序数は，順序数全体の超限列において自分より左側にある順序数全体の集合です．すでに $3 = \{0, 1, 2\}$ であることや，ω が自然数（すなわち有限順序数）全体の集合であることを，わたくしたちは知っています．$\omega + \omega$ は可算順序数の例です．つまり，そのメンバー（左にある順序数）に自然数全体とのペアを組ませることができます：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \omega & 1 & \omega+1 & 2 & \omega+2 & 3 & \omega+3 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

とすればよいのです．こうした順序数を用いて数え続けていけば，いずれ最初の不可算順序数 $\omega_1 = \aleph_1$ に行き当たります．こんなふうに順序数を十分多く使えば，$\mathbb{R}$ であれ他のどんな集合であれ，数え上げることができます．**連続体仮説**（CH）というのは，可算順序数全体を使えばそれだけで $\mathbb{R}$ を数え尽くすことができると主張するものです．CH は ZFC の公理系から証明することも反証することもできません．

上で述べた順序数と反復選択については，後ほどセクション I.8 と I.12 できちんと定式化することにします．その前にまず，公理を述べてそれらの意味するところが何かを議論し，そのうえで（数 3 の存在のような）簡単な結果をどのように導き出すのかを，お話しせねばなりません．

I.6　外延性，内包，対，和集合

手始めに，この 4 つの公理について論じ，いくつか初歩的な帰結を導きます．

公理 1「外延性」は次のとおりでした．

$$\forall x, y\, [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y].$$

セクション I.2 でも言っているとおり，自由変数はすべて全称量化されているものとします．つまり，公理が $\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$ とだけ書かれていても，これはすべての x と y についての言明であることを意図しています．

《インフォーマルな議論》 この公理によれば，集合はその元によって決まるのです．すなわち，集合 x と y が完全に同じ元たちからなるならば，この x と y は同じ集合です．外延性の公理はまた，わたくしたちが想定している，通常 V と書かれる言及の範囲または宇宙（図 I.1 参照）についても，いくつかのことを主張しています．わたくしたちの宇宙に属するあらゆるものは集合でなければなりません．仮に，x とか y とかとして集合でないもの，たとえばアヒルの D やブタの P などを認めてしまうと，それらは元をもちませんから，P と D と $\emptyset$ は異なるオブジェクトなのに

$$\forall z\, [z \in P \leftrightarrow z \in D \leftrightarrow z \in \emptyset \leftrightarrow \text{偽}]$$

となってしまいます．ですから P や D のような物理的オブジェクトはわた

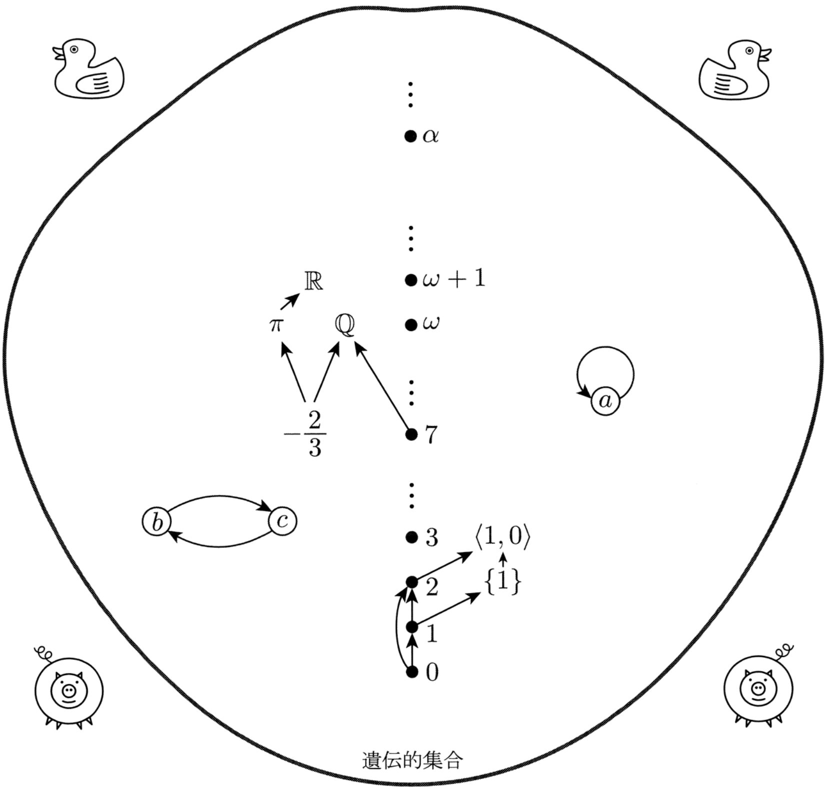


図 I.1 ZF^- 集合論の宇宙

くしたちの宇宙の一部にはなりません．

ところで，インフォーマルには物理的オブジェクトの集合や集まりを考えることはよくあります．たとえば $\{P, D\}$ とか，セクション I.5 で考えたようなアヒルの集合とか，ある動物園にいる動物全体の集合とか．ところが，そうした集合もやはりわたくしたちの数学的宇宙には属しません．セクション 0.2 で言ったことを思い起こしましょう．論理的記法においては変数の値はわたくしたちの宇宙の中にあるものだけに限ると考えるのでした．つまり，「$\forall z \cdots$」とは「わたくしたちの宇宙の中にあるすべての z について…」を略して書いている，というわけです．そこで，仮に $\{P\}$ とか $\{D\}$ とかの集合をわたくしたちの宇宙に入れてしまうと，$\{P\} \neq \{D\}$ なのに（P や

D がわたくしたちの宇宙にないものだから）$\forall z\,(z \in \{P\} \leftrightarrow z \in \{D\})$ が真になってしまいます．

一般に，x や y がわたくしたちの宇宙にあるもの（集合）だったとすると，それらの要素もすべてまたわたくしたちの宇宙にあるはずです．そうであって初めて，前提の「$\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)$」が実際に x と y が正確に同じ元たちからなることを意味し，外延性の公理によって $x = y$ と結論できることになるのです．ということは，x がわたくしたちの宇宙の中にあるなら，単に x が集合であるだけではなく，x の要素はすべて集合であり，x の要素の要素もまたすべて集合であり，以下同様であらねばなりません．このことを，x は**遺伝的に**集合である，といいます．（演習問題 I.2.1 で考えたように，集合 x の元のことを x の子であると考えるなら，x が遺伝的に集合であるとは，x 自身とその子孫たちがみな集合であるということです．）あとで論じる，数 0, 1, 2, 3 などが遺伝的集合の例になっています．

こうして，集合論の公理において量化された変数は図 I.1 のマルの内側にあるもの（遺伝的集合）の範囲を動くことが意図されています．図中の矢印は元であること（$\in$）をあらわしています．ただし，すべての矢印が描かれているわけではありません．外延性の公理は $a = \{a\}$ をみたす集合 a や $c \in b \in c$ をみたす集合 b と c などを排除するものではありません．こうした集合が排除されるのは基礎の公理（セクション I.14）によるのです．基礎の公理からは，この宇宙がきちんと階層をなして整頓され，すべての矢印が階層を昇っていく方向を向くことが導かれます．図 I.1 は，基礎の公理を用いない ZF^- 集合論の宇宙のイメージを与えるものです．

《フォーマルな議論》 最初の定理を示します．空集合は多くとも 1 個しか存在しません．

定義 I.6.1　$\mathrm{emp}(x)$ とは $\forall z\,(z \notin x)$ ということ．

そこで，外延性の公理により

定理 I.6.2

$$\mathrm{emp}(x) \wedge \mathrm{emp}(y) \to x = y$$

外延性の公理は $\neg[\,\exists x\,\mathrm{emp}(x)\,]$ と両立するので，空集合が**存在する**ことの証明は，外延性の公理だけではできません．

演習問題 I.6.3 外延性の公理と $\neg[\,\exists x\,\mathrm{emp}(x)\,]$ を両方みたすモデルを，演習問題 I.2.1 に示したモデルのうちから選び出すこと．

空集合が存在することの通常の証明では内包公理を用います．内包公理の第一近似として，次の仮説を考えましょう．

ガラクタ I.6.4 素朴内包公理 *NCA* とは次の主張である： 集合の任意の性質 $Q(x)$ に対して集合 $S = \{\,x : Q(x)\,\}$ が存在する．

とくに $Q(x)$ として $x \neq x$ のようにつねに偽であるものを用いると S が空になります．

残念なことに，*NCA* には二つばかり難点があります：

（１） 曖昧である，

（２） 矛盾している．

第 2 の難点について： カントールの集合論が矛盾していて，大きすぎる集合を考えると困ったことになるということを，カントール自身も知っていました．彼の発見した矛盾（セクション I.11 参照）は，ここではまだお話ししていない濃度の概念を用いていて少しばかりこみ入っていました．しかしカントールのパラドックスを言い替えることで，*NCA* からすぐに，まったく簡単に矛盾を得られることが，1901 年にラッセルによって指摘されました．

パラドックス I.6.5（ラッセルによる） *NCA* を用いて $R = \{\,x : x \notin x\,\}$ を作ろう．すると，$R \in R \leftrightarrow R \notin R$ となって矛盾する．

カントールは矛盾を含む集合を使わなければよいと考えました（[20] 参照）．この回避策は，1908 年のツェルメロの [63] における内包公理の言明に組み入れられています．すなわち，集合 z が**何かありさえすれば**，そこから $\{\,x \in z : Q(x)\,\}$ を作ってよいというのです．それでもまだ $R = R_z = \{\,x \in z : x \notin x\,\}$ という集合を作ることはできますが，ここから言えることは，$R \in z$ だとすれば $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ であるということだけで，これは

$R \notin z$ であることを意味します．したがって

定理 I.6.6　万有集合は存在しない： $\forall z \exists R\,[\,R \notin z\,]$.

ですから，インフォーマルに宇宙 V について語ることがあったとしても，実際にはそのようなオブジェクトは存在しないことがわかります．

第 1 の難点について： 性質とは，何でしょうか．たとえば自然数全体の集合 ω を構成し終えたとしても，数学では $\{n \in \omega : n$ は愚かだ$\}$ を作ることは期待できません．もう少しマシなレベルの話にしても，ヘタな定義からはいわゆる「パラドックス」が生まれてきます．よく知られたものとして

パラドックス I.6.7　四十文字以内の日本語表現で定義できない最小の自然数を n としよう．ところがこの n はまさにこの四十文字以内の日本語表現で定義できてしまっているではないか．

ここでは $Q(x)$ として，x は四十文字以内の日本語表現で定義できる，というものをとって，集合 $E = \{n \in \omega : Q(n)\}$ を作ろうとしています．この集合は有限です．可能な定義が有限個しかありえないからです．そして $n \notin E$ をみたす最小の n が矛盾をひきおこします．ツェルメロの [63] では「性質」とはどういうものかをフォーマルには述べていませんが，そこにこうしたパラドックスの問題が潜在していることはツェルメロも指摘していました．

この第 1 の難点を回避するために，性質とはセクション 0.2 で述べたように**論理式**で定義されるもののことだということにしましょう．（このあとのサブセクション I.7.2 も参照してください．） ここで論理式とは $\in$ と $=$ と命題演算子（かつ，または，否定など）と変数と量化記号 $\forall$ と $\exists$ から作られる表現です．こうしてわたくしたちの内包公理はセクション I.2 で言ったように，論理式 φ ごとに

$$\forall z\,[\,\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x))\,]$$

と主張することになります．先ほどの定理 I.6.6 の証明が $\varphi(x)$ として $x \notin x$ を用いた正しい証明であることに注意しましょう．別の φ を用いて空集合の存在が証明できます．

定義 I.6.8 $\mathrm{emp}(y)$ すなわち $\forall x(x \notin y)$ をみたす（唯一の）y を $\emptyset$ であらわす．

【定義の正当性の検証】 $\exists y\,[\mathrm{emp}(y)]$ を証明するために何かある集合 z を考えよう（公理 0 により少なくとも 1 個の集合が存在する）．$\varphi(x)$ として常に偽となる言明たとえば $x \neq x$ を用いて内包公理を適用すると，$\forall x(x \in y \leftrightarrow$ 偽$)$ すなわち $\forall x(x \notin y)$ であるような集合 y を得る．定理 I.6.2 によると，空集合は高々一つしか存在しないので，$\exists! y\ \mathrm{emp}(y)$ となり，この唯一のオブジェクトに $\emptyset$ という名をつけることができる．□

数学ではよくやることですが，（たとえば $\sqrt{2}$ とは $y^2 = 2$ をみたす唯一の正の数のことである，というように）なんらかの性質をもつオブジェクトに名前をつけるにあたっては，まずはその性質をもつオブジェクトが一つしかないことを証明しなければなりません．フォーマルな論理体系におけるオブジェクトの定義による導入についてのもっと厳密な議論はセクション II.15 にあります．

内包公理を（他の公理ともども）適用するにあたって，定義 I.6.8 の正当性の検証でやったように，いちいち内包公理の言明そのものに立ち返っていたのでは不便なことも多いでしょう．多少の記法を導入すれば，より簡単になります．

記法 I.6.9 任意の論理式 $\varphi(x)$ について，

☞ $\{\, x : \varphi(x) \,\}$，これは**インフォーマルに クラス** と呼ばれるもの．

☞ もしも $\forall x[\, x \in A \leftrightarrow \varphi(x)\,]$ をみたす集合 A があるなら，外延性によってそんな A はただ一つに定まる．このときこの集合を $\{\, x : \varphi(x) \,\}$ であらわし，$\{\, x : \varphi(x) \,\}$ が**存在する**という．

☞ そのような集合がないときには，$\{\, x : \varphi(x) \,\}$ は**存在しない**，あるいは**真クラス**をなすという．

☞ $\{\, x \in z : \varphi(x) \,\}$ とは $\{\, x : x \in z \wedge \varphi(x) \,\}$ の略記である．

内包公理は $\{\, x \in z : \varphi(x) \,\}$ の形の集合は必ず存在すると主張するものです．つい先ほど見たとおり，空集合 $\emptyset = \{\, x : x \neq x \,\}$ は存在し，万有集合 $\{\, x : x = x \,\}$ は存在しません．インフォーマルにこの集まりを考え，それ

を V，あるいは**万有クラス**と呼ぶのはときとして有益です．この V は真クラスです．真クラスについては他の有用な例がもっと出てきたころに改めて話すことにします．記法 I.8.4 を見なさい．ここではさしあたり，「$\{x : x = x\}$ は存在しない」とは $\neg\exists A \forall x\,[x \in A]$ を言いかえる一つの方法にすぎないことに注意しておいて下さい．これは記法上の約束にすぎず，「存在せぬものについていかにして語りうるか」などという哲学の問題はここにはありません．「トロールなんて存在しない」という主張に**論理的**難点はありませんし，トロールの存在を信じようが信じまいが，トロールについて語ることに問題はないのです．

内包公理について，あと三つばかり言うことがあります．

（1） この公理を表明するためには「論理式」の概念が必要になるので，それだけですでに初歩的な論理学の使用が避けられません．とはいえ，いまのところフォーマルな証明を書くために論理学を使ってはいません．公理を表明したあとでは，たいていの数学書と同じく，この章での証明はインフォーマルなものです．

（2） 内包公理は実際には無限個の公理の（パターンを示す）図式です．一つの論理式 φ ごとに一つの公理を主張するものです．

（3） $\varphi(x)$ という記法は論理式 φ が変数 x に依存することを強調しているのですが，φ には他の自由変数が含まれることもあります．たとえば，集合の共通部分や差集合を定義するときには，

定義 I.6.10　集合 z と u が与えられたとして，

☞ $z \cap u = \{x \in z : x \in u\}$.

☞ $z \setminus u = \{x \in z : x \notin u\}$.

ここでの φ はそれぞれ $x \in u$ と $x \notin u$ です．$z \cap u$ の場合に実際に用いられる内包公理は $\forall u \forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge x \in u)$ です．一般に z や u より大きなものになる $z \cup u$ を作るには，あとでいう和集合の公理という別の公理が必要になります．

演習問題 I.6.11　外延性の公理と内包公理をみたすのに 2 つの集合の和集合が存在しないことのあるモデルを，演習問題 I.2.1 に示したモデルた

ちのうちから選び出すこと．そのモデルは 2 つの集合 z と u をもつが，$\forall x[x \in w \leftrightarrow x \in z \vee x \in u]$ をみたす要素 w をもたない．

みなさんはきっと $\cup$ と $\cap$ を見たことがあり，基本的な性質もご存じのはずです．すでに知っていることをいかにして公理から導き出すかにここでは力点を置いているのです．たとえばみなさんは $z \cap u = u \cap z$ であることをご存じでしょうが，$\forall x[x \in z \cap u \leftrightarrow x \in u \cap z]$ であることは $\cap$ の定義からわかるので，この等式は先ほどの $\cap$ の定義と外延性の公理からたやすく導き出すことができます．また，$z \cap u \subseteq z$ ですが，これも $\cap$ の定義と $\subseteq$ の定義からたやすく導き出すことができるのです．

定義 I.6.12　$y \subseteq z$ とは $\forall x(x \in y \to x \in z)$ ということ．

内包公理では，φ に z が自由変数として含まれていてもかまいません．たとえば $z^* = \{x \in z : \exists u(x \in u \wedge u \in z)\}$ という定義も合法です．そこで，2 とは $\{0,1\}$ のことであると公式に定めたあとでは $2^* = \{0,1\}^* = \{0\}$ となります．

セクション I.2 で但し書きとしてつけた，φ が y を自由変数として含まないこと，という条件によって，「この命題は偽である」という嘘つきのパラドックスのような自己参照する定義を避けています．というのも，たとえば

$$\exists y \forall x\big(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge x \notin y\big)$$

という言明は z が空集合でない限り矛盾を引き起こすからです．

ここまでに存在を実際に示すことができた集合は空集合 $\emptyset$ だけであることに注意しましょう．外延性の公理と内包公理だけでは，空でない集合の存在を示すことができないのです．

演習問題 I.6.13　外延性の公理と内包公理と $\forall x \neg \exists y[y \in x]$ をみたすモデルを，演習問題 I.2.1 に示したモデルたちのうちから選び出すこと．

空でない集合は対の公理（公理 4）を用いれば作ることができます：

$$\forall x, y \exists z(x \in z \wedge y \in z).$$

このままでは z は x と y の他にも要素をもちうることになりますが，このような z が与えられたとすれば集合 $u = \{w \in z : w = x \vee w = y\}$ を

形成することはいつでも可能です．この u は，x と y を要素とし他には要素をもたない（外延性の公理により唯一の）集合です．これによって，次のように無順序対と順序対を定義することが正当であるとわかります．

定義 I.6.14

☛ $\{x, y\} = \{\, w : w = x \vee w = y \,\}$.

☛ $\{x\} = \{x, x\}$.

☛ $\langle x, y \rangle = (x, y) = \{\, \{x\}, \{x, y\} \,\}$.

順序対にとって鍵となるのは次の事実です．

演習問題 I.6.15

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \rightarrow x = x' \wedge y = y' \ .$$

［ヒント］ $x = y$ のときと $x \neq y$ のときに場合分けすること．　□

この演習問題をみたす順序対の定義は他にもいろいろありますが，クラトフスキが [42] で与えたこの定義が現在広く用いられています．たいていの数学をやる上では，順序対がどのように定義してあろうと関係ありません．ただ x と y がそれらの順序対から一意的にわかることだけが大切です．この場合には，順序対を (x, y) と書くのが慣例になっています．$\langle x, y \rangle$ という記法は，先ほど与えた特定の定義を採用していることが議論に関連してくる場合に用いることにします．

これで，数を数え始められます．

定義 I.6.16

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

演習問題 I.6.17　$\langle 0, 1 \rangle = \{1, 2\}$ であり $\langle 1, 0 \rangle = \{\{1\}, 2\}$ である．

これまでの公理で，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$，などなど，無限に多くの相異なる集合を作れるようになりました．しかしながら，まだ 2 つより多くの要素をもつ集合は得られません．そこで和集合の公理が用いられます．この公理によっ

て集合 $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$ を形成できるようになるのです．ここで集合 x と y に対して $x \cup y$ が存在するという公理を置くこともできるのですが，和集合の公理を表明するときは少し先回りをして無限個の集合の和集合の形成をも許す形で述べるのが普通です：

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x \big[x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \to x \in A \big]$$

わたくしたちの宇宙にあるどんな集合 $\mathcal{F}$ も，集合族（つまり集合の集合）と考えることができます．この公理は，$\mathcal{F}$ の元の元をすべて含む集合 A を与えてくれます．これで，集合 $\mathcal{F}$ に属するすべての集合の和集合をとることができます：

定義 I.6.18

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}} Y = \big\{ x : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y) \big\} .$$

すなわち $\mathcal{F}$ の要素の要素全体が $\bigcup \mathcal{F}$ の要素全体ということになります．記法 $\{ x : \cdots \}$ を用いるときにはいつでも，この集合の存在を確証してやらねばなりません．

【定義の正当性の検証】 和集合の公理に出てきた A をとり内包公理によって集合 $B = \{ x \in A : \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y) \}$ を形成しなさい．すると，$x \in B \leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{F} (x \in Y)$ となる．□

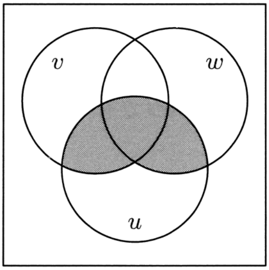
定義 I.6.19 $u \cup v = \bigcup \{u, v\}$，$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$，$\{x, y, z, w\} = \{x, y\} \cup \{z, w\}$.

これらの概念についての基本事実をみなさんはすでにご存じでしょうが，注意書き I.3.2 の路線にしたがい，そうした事実のすべてに対していちいち公理からの証明はつけないことにします．それらの事実の実例を二つあげるとすれば

演習問題 I.6.20 $\{x, y, z\} = \{x, z, y\}$ と $u \cap (v \cup w) = (u \cap v) \cup (u \cap w)$ を証明すること．

これらは定義から外延性の公理を用いてたやすく導き出せます．第 2 の等

式についていうと，ヴェン図を用いるインフォーマルな証明は場合分けによる厳密な証明をつづめて書いたものとみなせます．たとえば，すべての x について $x \in u \cap (v \cup w) \leftrightarrow x \in (u \cap v) \cup (u \cap w)$ となることを証明するにあたっては，$x \in u$ かつ $x \in v$ かつ $x \in w$ である場合，$x \in u$ かつ $x \in v$ かつ $x \notin w$ である場合，$x \in u$ かつ $x \notin v$ かつ $x \in w$ である場合，などなど，8 とおりの場合分けで考えることになります．それぞれの場合において「$\leftrightarrow$」の左辺と右辺がともに真であるかともに偽であるということを検証するわけです．この紆余曲折のある証明を一枚の図像にまとめるには，3 つの集合が平面を 8 つの領域に切り分けるヴェン図をよくあるとおりに描き，$u \cap (v \cup w)$ に影をつけるのと $(u \cap v) \cup (u \cap w)$ に影をつけるのとで結果として同じ図像が得られることをみます．ここで影をつけた集合は，「$\leftrightarrow$」の両辺がともに真となる領域からなるわけです．



集合族の共通部分も定義できます．2 つの集合の共通部分の場合と同様，これは内包公理によってただちに確証できます．他の公理は必要ありません．

定義 I.6.21　$\mathcal{F} \neq \emptyset$ の場合に

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y = \{\, x : \forall Y \in \mathcal{F}(x \in Y) \,\}$$

と定める．

【定義の正当性の検証】　$\mathcal{F}$ の要素 E を一つ決めて $\{ x \in E : \forall Y \in \mathcal{F} (x \in Y) \}$ を形成してみなさい．　□

ここで $\bigcup \emptyset = \emptyset$ であるいっぽう，$\bigcap \emptyset$ は万有クラス V になってしまうので，存在しません．

これで，もっと先まで数え続けられるようになりました．

定義 I.6.22　順序数の**後続者函数** $S(x)$ とは $x \cup \{x\}$ のことだとする．そして，

$$3 = S(2) = \{0,1,2\}$$
$$4 = S(3) = \{0,1,2,3\}$$
$$5 = S(4) = \{0,1,2,3,4\}$$
$$6 = S(5) = \{0,1,2,3,4,5\}$$
$$7 = S(6) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

などなど，などなど，と定める．

ですが，この「などなど」とはどういう意味なのでしょうか．**インフォーマルには，自然数**（あるいは**有限順序数**）を，0 に S を有限回繰り返し適用したもの，と定義できます．そして $\mathbb{N}$ あるいは ω を自然数全体の集合として定めます．すると各 $n \in \omega$ は n 未満の自然数の集合となります．小学校ではこの自然数を使って数を数えていたわけです．

ここでは「インフォーマルには」と言いました．フォーマルにこれを解そうとすれば，「有限回繰り返す」とはどういうことかがわからねばなりません．もちろんそれは「ある $n \in \omega$ について，n 回繰り返す」ということです．ですから ω が何であるかがわからねばなりません．これでは話がまるきり循環してしまいます．この循環を断つために，セクション I.8 では先に ω 上の順序関係の性質を定式化するのですが，その前に関係（とくに順序づけと整列順序）や函数について，もっと知っておく必要があります．セクション I.7 でそれらを扱います．順序数のフォーマルな定義ができてしまえば，x が順序数のときに $S(x)$ がその後続者すなわち x より大きいすぐ隣りの順序数になることを示すのは難しくありません．（演習問題 I.8.11 参照）

すべての自然数を数え尽くしてしまったら，はじめての無限順序数に行き当たります．どの順序数も自分より小さい順序数全体の集合なのですから，このはじめての無限順序数とは自然数全体の集合 ω のことです．それに続く順序数は $S(\omega)$ すなわち $\omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,\cdots,\omega\}$ であり，その次は $S(S(\omega)) = \{0,1,2,\cdots,\omega,S(\omega)\}$ です．そうすると，今度は順序数を足したりかけたりするにはどうするかを説明しないといけなくなりますが，順当にも $S(S(\omega)) = \omega + 2$ となり，このようにして

$$0, 1, 2, \cdots, \ \omega, \ \omega+1, \ \omega+2, \cdots, \ \omega+\omega=\omega\cdot 2, \ \omega\cdot 2+1, \cdots$$

と数え続けることになります．このように超限的に数え続けるという着想はカントールによるものです．順序数の（自分より小さい順序数の全体という）表示法はフォン・ノイマンによるものです．

I.7　関係・函数・離散数学

みなさんは数学をする上ですでに（順序づけなどの）関係や函数を使ってきたに違いありませんが，そうしたものもわたくしたちの公理的集合論の枠内で説明する必要があります．基本的な性質と定義をサブセクション I.7.1 で述べます．サブセクション I.7.3 で扱う整列順序の理論は，セクション I.8 で順序数を論じるさいに必要になります．

◉I.7.1　基本事項

定義 I.7.1　集合 R が（二項）**関係**であるとは，R が順序対の集合であること，すなわち

$$\forall u \in R \, \exists x, y [\, u = \langle x, y \rangle \,]$$

が成立することだとする．$\langle x, y \rangle \in R$ のことを xRy と書き，$\langle x, y \rangle \notin R$ のことを $x \not R y$ と書く．

参照の便宜のため，よく用いられる性質の定義をまとめておくと，

定義 I.7.2

- R が A 上で**推移的**であるとは，$\forall x, y, z \in A [\, xRy \wedge yRz \rightarrow xRz \,]$ が成立することである．
- R が A 上で**非反射的**であるとは $\forall x \in A [\, x \not R x \,]$ となることである．
- R が A 上で**反射的**であるとは $\forall x \in A [\, xRx \,]$ となることである．
- R が A 上で**三分律**をみたすとは，$\forall x, y \in A [\, xRy \vee yRx \vee x = y \,]$ となることである．
- R が A 上で**対称的**であるとは，$\forall x, y \in A [\, xRy \leftrightarrow yRx \,]$ となることである．
- R が A 上で推移的かつ非反射的であるとき，R は A を**狭義に半順**

序づけするという．

➻ R が A 上で推移的かつ非反射的であり，A 上で三分律をみたすとき，R は A を**狭義に全順序づけする**という．

➻ R が A 上で反射的，対称的，推移的であるとき，R は A 上の**同値関係**であるという．

たとえば $\mathbb{Q}$ 上で $<$ は（狭義の）全順序づけですが，$\leq$ はそうではありません．順序関係では狭義順序づけ $<$ を基本概念とし $x \leq y$ を $x < y \vee x = y$ の略記と考えるのが応用上の具合がよいのです．

定義 I.7.2 はどんな集合 R と A についても有効です．実際に用いられる場面では R は二項関係であることでしょうが，R が A の要素の順序対しか含まないという条件はつけません．たとえば $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ において成分ごとの順序づけを考えてみましょう．$(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ とは $x_1 < y_1$ かつ $x_2 < y_2$ のことだとします．このとき $(2,3)\not{R}(3,2)$ かつ $(3,2)\not{R}(2,3)$ なので，R は三分律をみたしません．ところが，この順序を右肩上がりの直線上に制限して考えてみると，そこでは三分律をみたすので，たとえば R が $\{(x, 2x) : x \in \mathbb{Q}\}$ を全順序づけする，と言うことが許されるわけです．

もちろん，これらの例は $\mathbb{Q}$ も $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ も構成できていない現段階ではインフォーマルなものです．インフォーマルな例を続けるとして，$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ の部分集合はどれも二項関係であり，それを x-軸と y-軸に射影すれば，その関係の定義域と値域が得られます．

定義 I.7.3　集合 R について

$$\mathrm{dom}(R) = \{\, x : \exists y[\, \langle x, y\rangle \in R\,]\,\},$$
$$\mathrm{ran}(R) = \{\, y : \exists x[\, \langle x, y\rangle \in R\,]\,\}$$

と定める．

【定義の正当性の検証】　これらがたしかに集合として存在することをみよう．$\langle x, y\rangle$ すなわち $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ が R に属するとき，$\{x\}$ と $\{x, y\}$ は $\bigcup R$ に属し，x と y は $\bigcup\bigcup R$ に属する．そこで，内包公理により

$$\{\, x \in \bigcup\bigcup R : \exists y[\, \langle x, y\rangle \in R\,]\,\} \text{ と } \{\, y \in \bigcup\bigcup R : \exists x[\, \langle x, y\rangle \in R\,]\,\}$$

を作り出すことができる．□

定義 I.6.14 で与えた順序対の特定の定義に依存しないやり方で $\mathrm{dom}(R)$ と $\mathrm{ran}(R)$ の存在を証明することもできます．演習問題 I.7.16 を参照しなさい．

定義 I.7.4　$R{\restriction}A = \{\langle x, y\rangle \in R : x \in A\}$.

この $\restriction$ は定義域の制限で，もっぱら函数に対して用いられます．

定義 I.7.5　R が**函数**であるとは，R が関係であって，どの $x \in \mathrm{dom}(R)$ に対しても，ただ一つの y が $\langle x, y\rangle \in R$ をみたすことである．このとき，そのただ一つの y のことを $R(x)$ と書く．

次に，単射，全射，全単射をふつうどおりに定義します．

定義 I.7.6

☛ $F\colon A \to B$ とは，F が函数で $\mathrm{dom}(F) = A$ であり $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$ であること．

☛ $F\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$（あるいは $F\colon A \twoheadrightarrow B$）とは，$F\colon A \to B$ であって $\mathrm{ran}(F) = B$ であること（F は**全射**である，あるいは，F は A を B の**上へ**写像する）．

☛ $F\colon A \xrightarrow{1-1} B$（あるいは $F\colon A \hookrightarrow B$）とは，$F\colon A \to B$ であって $\forall x, x' \in A[\,F(x) = F(x') \to x = x'\,]$ となること（F は**単射**である，あるいは，F は A を B の中へ **1 対 1** に写像する）．

☛ $F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$（あるいは $F\colon A \rightleftarrows B$）とは，$F\colon A \xrightarrow{1-1} B$ であって $F\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$ でもある，ということ（F は A から B への**全単射**である）．

たとえば実数のサイン函数については，次の 5 つの言明がいずれも真です．

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$\sin\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{onto}} [-1, 1]$$
$$\sin{\restriction}[-\pi/2, \pi/2]\colon [-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$$
$$\sin{\restriction}[-\pi/2, \pi/2]\colon [-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} [-1, 1]$$

定義 I.7.7　$F(A) = F``A = \mathrm{ran}(F{\restriction}A)$.

これを実際に用いるときはたいてい F は函数です．$F(A)$ は $F[A]$ と書かれることもあり，これらは数学でよく用いられる記法です．たとえば $\sin([0,\pi/2]) = [0,1]$ であり $\sin(\pi/2) = 1$ ですが，$\pi/2$ が実数，$[0,\pi/2]$ が実数の集合なので混乱する心配はないのです．ところが A が F の定義域の要素であると同時に部分集合でもありうるとなると，$F(A)$ と書いたのでは曖昧です．こういう場合に $F``A$ を用いるのです．たとえば $\mathrm{dom}(F) = 3 = \{0,1,2\}$ であったとしたら，$F(2)$ を入力 2 に対する $F$ の値の意味で，$F``2$ を集合 $\{F(0), F(1)\}$ の意味で用います．

これまでに論じてきた公理だけでは，さほど多くの関係や函数を作り出すことはできません．みなさんは，与えられた集合 S と T の**直積**またはカルテジアン積 $S \times T = \{\langle x, y\rangle : s \in S \wedge t \in T\}$ の部分集合としてたくさんの関係や函数が作れるんじゃないかと考えるかもしれませんが，その $S \times T$ の存在を証明するために，また別の公理が必要なのです．実際 $\{0\} \times T$ という集合は $\{\langle 0, x\rangle : x \in T\}$ と書きあらわすことができ，T と同じサイズをもつであろうということまで明白であるにもかかわらず，ここまでの公理ではこの $\{0\} \times T$ の存在すら証明できないのです．フレンケル（*ZFC* の“F” とはこの人です）が 1922 年に [26] でやったとおり，わたくしたちは公理 6（置換公理）

$$\forall x \in A \exists ! y \varphi(x,y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x,y)$$

によって，こうした集まりの存在を保証してやります．集合 A の各要素 x に一意的にオブジェクト y_x（つまり $\varphi(x,y)$ をみたす y のこと）が対応していたとしましょう．このとき，A の各要素 x を y_x に置き換えた集合 $C = \{y_x : x \in A\}$ が作れてしかるべきです．実際，置換公理と内包公理をあわせれば，この C は $C = \{y \in B : \exists x \in A \varphi(x,y)\}$ として形づくることができます．

定義 I.7.8　$S \times T = \{\langle s, t\rangle : s \in S \wedge t \in T\}$.

【定義の正当性の検証】　上の定義は $S \times T = \{x : \exists s \in S \exists t \in T[x = \langle s, t\rangle]\}$ を手短に書いたにすぎない．この $\{x : \cdots\}$ という記法を用いる際は，いつものとおり，この集合が本当に存在することを証明せねばならない．そのために置換公理を 2 回用いる．まず，$s \in S$ を固定しておいて $\{s\} \times$

$T = \{\langle s, t\rangle : t \in T\}$ を上に述べた要領で置換公理（と内包公理）を用いて作る．このときは A として T，$\varphi(x, y)$ として $y = \langle s, x\rangle$ を意味する論理式をとる．次に，集合 $D = \{\{s\} \times T : s \in S\}$ を上に述べた要領で置換公理（と内包公理）を用いて作る．今度は A として S，$\varphi(x, y)$ として $y = \{x\} \times T$ を意味する論理式をとる．すると $\bigcup D$ すなわち $\bigcup_{s \in S}\{s\} \times T$ はちょうど $s \in S$ かつ $t \in T$ のときの $\langle s, t\rangle$ のすべてからなる集合となる．□

函数を定義するときによく使われる次のような方法も置換公理によって保証されます．

補題 I.7.9　$\forall x \in A \exists! y \varphi(x, y)$ であったと仮定しよう．このとき，$\mathrm{dom}(f) = A$ であって各 $x \in A$ に対して $\varphi(x, y)$ となるただ一つの y を $f(x)$ とするような函数 f が存在する．

【定義の正当性の検証】　置換公理でいうような B を一つ固定して，$f = \{\langle x, y\rangle \in A \times B : \varphi(x, y)\}$ とおけばよい．□

こうして，たとえば $\mathrm{dom}(f) = A$ かつすべての $x \in A$ について $f(x) = \{\{x\}\}$ をみたす函数 f が任意の集合 A に対してとれるわけです．

直積は数学に頻出します．たとえば，直線 $\mathbb{R}$ があれば平面 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ が作れます．また，X から Y への二変数函数は，実は函数 $f\colon X \times X \to Y$ であり，したがって $f \subseteq (X \times X) \times Y$ です．また関係の逆や函数の合成の定義もできます．

定義 I.7.10　$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in R\}$.

【定義の正当性の検証】　これは $\mathrm{ran}(R) \times \mathrm{dom}(R)$ の部分集合として定義できる．□

函数 f の逆 f^{-1} は f が 1 対 1 でないかぎり函数になりません．逆正弦函数 $\sin^{-1}$ または arcsin は，実際には $(\sin \restriction [-\pi/2, \pi/2])^{-1}$ という函数なのです．

定義 I.7.11　$G \circ F = \{\langle x, z\rangle \in \mathrm{dom}(F) \times \mathrm{ran}(G) : \exists y[\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle y, z\rangle \in G]\}$.

とくに F と G が函数で $\mathrm{ran}(F) \subseteq \mathrm{dom}(G)$ である場合には，単に $G \circ F(x) = G(F(x))$ と言って済ませています．

もしも S と T が順序集合なら，直積 $S \times T$ を**辞書式**に順序づけられます．$S \times T$ の要素をあたかも 2 文字からなる語のようにみるのです．2 文字の語どうしを比べるためには，二つの語の 1 文字目が同じでなければそれらを比べ，同じなら 2 文字目を比べます．

定義 I.7.12　関係 $<$ と $\prec$ の，集合 $S \times T$ 上の**辞書式積**とは，

$$\langle s, t\rangle \lhd \langle s', t'\rangle \leftrightarrow \left[\, s < s' \vee [s = s' \wedge t \prec t'] \,\right]$$

によって定まる $S \times T$ 上の関係 $\lhd$ のことである．

演習問題 I.7.13　もしも $<$ と $\prec$ がそれぞれ S と T を狭義に全順序づけするなら，$S \times T$ 上の両者の辞書式積が $S \times T$ を狭義に全順序づけする．

あとは，同型という概念があります．

定義 I.7.14　F が $(A; <)$ から $(B; \lhd)$ の上への**同型写像**であるとは，F が全単射であって（$F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$），$\forall x, y \in A[\, x < y \leftrightarrow F(x) \lhd F(y) \,]$ となることをいう．また，$(A; <)$ から $(B; \lhd)$ の上への同型写像が存在するときに，$(A; <)$ は $(B; \lhd)$ と**同型**であるといって，これを $(A; <) \cong (B; \lhd)$ と書く．

この定義は $<$ や $\lhd$ が順序関係であろうとなかろうと意味をなすものですが，さしあたってはもっぱら順序関係について用いるつもりです．実のところこの定義はモデル理論で用いられる代数的構造の間の同型写像という一般的な概念（定義 II.8.18 参照）の特殊ケースです．

同値関係（定義 I.7.2）による商構造の，数学における通常の定義も，置換公理によってその正当性が保証されます．

定義 I.7.15　R を集合 A 上の同値関係としよう．A の要素 x に対して $[x] = \{\, y \in A : yRx \,\}$ とおき，これを x の**同値類**と呼ぶ．さらに $A/R = \{\, [x] : x \in A \,\}$ とおく．

ここで $[x]$ を作り出すのには内包公理があればよいのですが，同値類全体の集合 A/R を作ることの正当性の保証には，補題 I.7.9 によって A を定義

域とし各 x について $f(x) = [x]$ となる函数 f を考えて $A/R = \mathrm{ran}(f)$ とすればよいのです.

たいていの応用例では，A は群であったり位相空間であったりの構造をもっていて，A/R にもしかるべき構造が定められることになります．こうしたことは群論やトポロジーの本で論じられています．モデル理論での商構造の応用例が定義 II.12.9 にあります.

これと同様にして，置換公理を用いれば，$\mathrm{dom}(R)$ と $\mathrm{ran}(R)$（定義 I.7.3 参照）の存在を，順序対 (x, y) を集合論的にどう定義するかには依存せずに証明できます.

演習問題 I.7.16　何かしら「対」$\llbracket x, y \rrbracket$ が定義できて，$\llbracket x, y \rrbracket = \llbracket x', y' \rrbracket \to x = x' \wedge y = y'$ が証明できたと仮定しよう．このときすべての集合 R について $\{ x : \exists y [\llbracket x, y \rrbracket \in R] \}$ と $\{ y : \exists x [\llbracket x, y \rrbracket \in R] \}$ の存在を証明しなさい.

◉I.7.2　数学基礎論にまつわる注意事項

（1） 集合論が万物の理論だとは言いましたが，だからといって他のことを何も知らない状態から本書の（また他のどんなものでも）公理的集合論の議論を理解できると言うつもりはありません．無限集合のことは何も知らなくてもかまいません．それについては，公理から議論が展開していく中で学ぶことができます．しかし，どの命題が公理であってどれがそうでないかがわかるためだけでも，有限の組合せ論の初歩についての理解が求められます．たとえば，本書では，セクション I.2 の内包図式の φ を，なんらかの論理式に書き換えることで，ひとつひとつの内包公理が得られる，ということが，みなさんに理解していただけるものと想定しています．論理式とはどういうものか，それについてはセクション 0.2 で手短に述べましたし，セクション II.5 でもっと詳しく定義しますが，これを理解するためにも，「有限」とはどういうことで，記号の有限列とは何のことかが，わかっている必要があるわけです.

こうした，フォーマルな分析を加えることのない基本的な**有限主義的推論**（セクション III.1 参照）のことを**メタ理論**と呼びます．メタ理論において，論理式とは何か，とか，どの論理式が**フォーマルな理論**（形式的理論，ここでは

ZFC ですが）の公理になるのか，といったことを説明するわけです．

（2） 集合論を展開するにあたって，「関係」とか「函数」といったインフォーマルな概念は，2とおりの異なった形で表現されます．一つはフォーマルな理論の対象である集合として，もう一つはメタ理論における簡略記法として．

まず関係について考えましょう．関係とは順序対の集合のことだという定義をすでに与えてありますので，関係も集合の一種であり，フォーマルな理論 ZFC の中でそうした集合が扱われます．

インフォーマルには $\in$ や $=$ や $\subseteq$ などを「関係」と呼ぶこともよくありますが，これらは上に述べた意味での関係ではありません．たとえば包含「関係」$S = \{p : \exists x, y[p = \langle x, y\rangle \wedge x \subseteq y]\}$ は存在しません．記法 I.6.9 の用語によっていいかえれば，この S は真クラスをなします．クラス S が存在しないのは，$\mathrm{dom}(S)$ が万有クラス V という存在しないものになってしまうからです．記号 $\subseteq$ はむしろメタ理論における簡略記法であるとみなしたほうがよいのです．つまり，$x \subseteq y$ とは $\forall z(z \in x \to z \in y)$ を略して書いたものなのです．同様に，同型という「関係」$\cong$ も順序対の集合ではありません．そうではなくて，$(A; <) \cong (B; \lhd)$ という語法は A と $<$ と B と $\lhd$ の間に成立するたいそう複雑な言明の簡略記法として定義 I.7.14 において導入されたのでした．そしてもちろん，要素「関係」$\in$ と相等「関係」$=$ とは，集合論の言語の基本的な記号そのものです．

ところが，関係の性質について定義 I.7.2 で示したような定義はこうした「擬似関係」に対しても意味をなします．というのも，これらの定義に擬似関係を嵌め込むことができるからです．たとえば $\in$ が集合 $3 = \{0, 1, 2\}$ を全順序づけすると言ってよいのです．このとき，$\in$ が 3 上で推移的だという言明は $\forall x, y, z \in 3[x \in y \wedge y \in z \to x \in z]$ という主張の言いかえにすぎません．いっぽう，$\subseteq$ は非反射律をみたさないので 3 上の狭義の全順序になりません．また，$\subseteq$ が V 上で推移的であるということも，$\forall x, y, z[x \subseteq y \wedge y \subseteq z \to x \subseteq z]$ という（真な）言明の言いかえとして意味をなします．同様に考えて，$\in$ は V 上で推移的でないのですが，これは $0 \in \{0\}$，$\{0\} \in \{\{0\}\}$ だけれど $0 \notin \{\{0\}\}$ であるからです．同様に考えると次の主張も意味をなします．

演習問題 I.7.17　$\cong$ は同値関係である．

［ヒント］ 推移律を示すには $(A; \lhd_1)$ から $(B; \lhd_2)$ への同型写像 F と $(B; \lhd_2)$ から $(C; \lhd_3)$ への同型写像 G を考えて，それらの合成によって同型写像 $G \circ F \colon A \to C$ を得なさい．□

何かが何かの言いかえであるという議論はメタ理論においてなされるものです．たとえば演習問題 I.7.17 では，メタ理論において，もとの言明を集合だけを扱う言明へと解きほぐして，それを *ZFC* の公理系から証明するのです．

関係の特別な場合である函数についてもこうしたことは同様に論じられます．たとえば，$f = \{(1,2),(2,2),(3,1)\}$ とすればこれは一つの函数で，$\mathrm{dom}(f) = \{1,2,3\}$ であり $\mathrm{ran}(f) = \{1,2\}$ です．この f は *ZFC* の中でフォーマルに定義されるものです．インフォーマルには $\bigcup \colon V \to V$ も函数ですが，V は存在せず，また順序対の集合 $\{\, \langle \mathcal{F}, \bigcup \mathcal{F} \rangle : \mathcal{F} \in V \,\}$ をつくることもできません．そんなことができたら $\mathrm{dom}(\bigcup)$ が V になってしまうからです．そうではなくて，集合 Z が集合族 $\mathcal{F}$ の全要素の和集合であることを述べる論理式 $\varphi(\mathcal{F}, Z)$ をわたくしたちはもっているわけです．定義 I.6.18 で述べたところによると，この $\varphi(\mathcal{F}, Z)$ は

$$\forall x[\, x \in Z \leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{F}[\, x \in Y \,]]$$

というものです．これについて $\forall \mathcal{F} \exists ! Z \varphi(\mathcal{F}, Z)$ を証明してから，そのような Z を「意味する」ものとして $\bigcup \mathcal{F}$ を使います．ここで「意味する」と言ったのは，たとえば $\bigcup \mathcal{F} \in w$ といった主張が $\exists Z(\varphi(\mathcal{F}, Z) \wedge Z \in w)$ の省略記法になっているということです．セクション II.15 でこうしたことをもっとフォーマルに論じています．

関係の場合と同じく，函数の初等的な性質はこうした「擬似函数」についても意味をなします．たとえば「$\bigcup$ は 1 対 1 でない」と言うことができます．これはあくまで，$\exists x_1, x_2, y[\, \varphi(x_1, y) \wedge \varphi(x_2, y) \wedge x_1 \neq x_2 \,]$ という文をつづめて言っているだけです．

18 世紀から 19 世紀にかけて実解析学が発展してゆくにつれ，函数とは厳密にいうと何なのかをめぐって論争が起きました（文献 [44][45] を参照）．数式で定義できる個々の実数値函数については，$f(x) = x^2 + 3x$ なら $f'(x) = 2x + 3$ だ，というぐあいで，特に問題はありません．ところが，いたるとこ

ろ微分不可能な連続函数など，抽象的な例がしだいに考察されるようになってくると，いったいどんな種類の規則があれば函数を定義できるのかはっきりさせてくれ，という問いかけがなされるようになったのです．

20 世紀のはじめに，集合論と論理学の発展にともなって「順序対の集合としての函数」の概念が広く受け入れられるようになりました．こんにちでは，まったく任意の実数値函数の概念と，定義可能な函数（これはモデル理論的な概念で，第 II 章で扱います）あるいは計算可能な函数（こちらは再帰理論的な概念で，第 IV 章で扱います）との間の，明確な区別がなされるようになっています．しかし，21 世紀のいまになっても，初等微積分の教科書（たとえば [60] の 19 ページ）のなかにはこの点での混乱が残っていて，函数とは x に y を対応させるなんらかの規則のことだと定義されることがしばしばあります．書き下すことのできる規則はせいぜい可算個しかないのに実数値函数は不可算個あるのですから，こうした記述はまことにミスリーティングです．解析学では $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への函数全体の集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ を用いることがときどきはありますし，もっと頻繁に連続函数全体のなすその部分集合 $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ を用います．この $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ も $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ も不可算集合で，サイズはそれぞれ $2^{\aleph_0}$ と $2^{2^{\aleph_0}}$ です（演習問題 I.15.8 参照）．

とはいえ，「規則としての函数」という観点も，$\bigcup\colon V \to V$ のようにすべての集合に対して定義された演算について話す場合に生き残っています．万有クラス V や V 上の函数は実際には存在しないので，そうした概念に意味をもたせるには，ある集合を他の集合の函数として与えてくれる明示的な規則すなわち論理式を，メタ理論における省略記法の導入の一つの手段とみなすほかありません．このことの実例は，セクション I.2 で，$y = S(x)$ を意味する論理式を明示的に書き下すことによって後続者「函数」を定義したさいに，すでに登場していました．そこではさらに，もともとは函数記号 S を含む形で書かれていた無限の公理を，基本的な記号である $\in$ と $=$ だけを含む言明に書き直すにはどうすればよいかを説明しました．

補題 I.7.9 は「規則としての函数」を集合 A に制限すれば「順序対の集合としての函数」が得られることを述べています．たとえばどんな集合 A に対しても $\bigcup{\restriction}A = \{(x,y) : x \in A \wedge y = \bigcup x\}$ をつくることができるのです．

（3） 個々の命題とメタ理論における**図式**とは区別しなければなりませ

ん．ZFC の公理のうち内包公理と置換公理以外は，集合論の言語における一つの命題（をしかるべく略記したもの）になっています．ところが，内包公理はたくさんの公理をつくり出すメタ理論における図式なのです．つまり，セクション I.2 に掲げた内包図式にあらわれた φ を論理式に書き換えることで，ZFC の一つの公理が得られるのです．ですから ZFC は実は無限に多くの公理からなるリストなのです．同様に，置換公理も無限に多くの公理の図式です．

定理についても同じことがいえます．補題 I.7.9 は実際には定理の図式であり，フォーマルには，その証明はひとつひとつの論理式 $\varphi(x,y)$ ごとに $\forall x \in A\exists! y\varphi(x,y) \to \exists f[\,f$ は函数である $\wedge \operatorname{dom}(f) = A \wedge \forall x \in A\varphi(x, f(x))]$ という ZFC の定理がいかにして証明できるかを，メタ理論において説明するものなのです．いっぽう，演習問題 I.7.17 は単一の定理であって，ZFC から証明できる一つの命題（を略記したもの）です．

◉I.7.3　整列順序づけ

定義 I.7.18　R を関係とする．X の元 y は

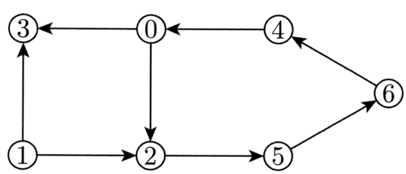
$$\neg\exists z(z \in X \wedge zRy)$$

をみたすとき X において R-**極小**であるといい，

$$\neg\exists z(z \in X \wedge yRz)$$

をみたすとき X において R-**極大**であるという．R が A 上で**整礎的**であるとは，すべての空でない $X \subseteq A$ に対し，X において R-極小な $y \in X$ が存在することをいう．

この概念はとても頻繁に登場するので，図を用いて例をあげてみます．A が有限集合のとき，R は矢印であらわされた有向グラフとみることができます．



この図では，$R = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,5),(4,0),(5,6),(6,4)\}$ です．$X = 4 = \{0,1,2,3\}$ としましょう．すると 0 と 1 がいずれも X において R-極小（X の要素からそこへ向かう矢印がない）であり，2 と 3 がいずれも X において R-極大（そこから X の要素へ向かう矢印がない）となっています．R が $6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ 上で整礎的であることは容易にわかりますし，7 上では整礎的でないことも $C = \{0,2,5,6,4\} \subseteq 7$ というサイクルが R-極小要素をもたないことからわかります．

もしも R が A 上で整礎的であれば，R は A 上で非反射的です．というのも，aRa だったら $\{a\}$ が R-極小要素をもたないからです．

演習問題 I.7.19　A が有限のとき，R が A 上整礎的であることと A 上で非巡回的であること（サイクルを含まないこと）が同値である．

この演習問題はさしあたりインフォーマルなものと考えておかねばなりません．というのも，わたくしたちはまだ「有限」の正式な定義をしていないからです．それに，「サイクル」（$a_0Ra_1Ra_2R\cdots Ra_nRa_0$）の概念も「有限」の概念に訴えています．無限集合においてはこの演習問題の結果は成立しません．狭義の全順序関係は非巡回的には違いありませんが，整礎的とは限りません．たとえば $\mathbb{Q}$ 上の普通の順序 $<$ は，$\mathbb{Q}$ 自身が $<$-極小要素をもたないため，整礎的になりません．

あとでツォルンの補題（セクション I.12）や基礎の公理（これは $\in$ が V 上で整礎的だという主張です．セクション I.14 を見なさい）を論じるときに，定義 I.7.18 にはまた出番がありますが，ここではひとまず，整礎的な全順序に話を限ることにします．

定義 I.7.20　R が A を**整列順序づけ**するとは，R が A を狭義に全順序づけし，かつ R が A 上整礎的であることをいう．

R が全順序のときは X の極小要素というのは存在すればただ一つで，それが最小要素にほかなりません．ですから整列順序というのは，空でない部分集合が必ず最小要素をもつような狭義全順序のことです．他の例にもれずこの定義も，順序対の集合としての関係と $\in$ のような擬似関係の両方で意味をなします．

インフォーマルな話として，ω 上の普通の順序づけ（これは $\in$ のことです）は整列順序です．整礎性とはつまり最小原理のことで，これについてはすでに帰納法による証明でお目にかかっています：$\forall n \in \omega\, \varphi(n)$ を証明するためには，$X = \{\, n \in \omega : \neg\varphi(n) \,\}$ とおいて $X \neq \emptyset$ と仮定し，X の最小要素（つまりその定理がはじめて成立しなくなるところ）を考えて矛盾を導き出すわけです．

フォーマルな話としては，整列順序であることは順序数の定義に含まれるので，ω も定義により整列順序なのですが，ω の存在を公理から証明するためにはもう一仕事必要です．これまでのところわたくしたちが定義した数は 7 までです（定義 I.6.22 を参照）．

まずは $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ の整列部分集合を，これらの集合についての知識を使ってインフォーマルに例示しましょう．ZFC の中で $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ を定義したあとでは，それらはフォーマルな（正式な）例となります．

整列順序の「最小要素」を微積分でいう最大下界と混同しないでください．たとえば閉区間 $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ は整列順序づけされていません．部分集合 $(0, 1)$ は最大下界 $\inf(0, 1) = 0$ をもちますが最小要素をもたないのです．

前にも言いましたが「最小原理」は $\mathbb{N}$ が整列順序づけされていることを意味しています．また，その部分集合もすべて整列順序づけされていることが，次の結果からわかります．

演習問題 I.7.21　R が A を整列順序づけしていて $X \subseteq A$ であれば，R は X を整列順序づけする．

例 I.7.22　インフォーマルな話として，自然数を用いることで任意の整列順序集合の数え上げを始められます．$\emptyset$ は整列順序づけされています．もしも A が空でなければ A は最小要素 a_0 をもちます．次にもしも $A \neq \{a_0\}$ であれば，$A \setminus \{a_0\}$ は最小要素 a_1 をもちます．さらにもしも $A \neq \{a_0, a_1\}$ であれば，$A \setminus \{a_0, a_1\}$ が最小要素 a_2 をもちます．こんなふうに続けていくと，もしも A が無限であったならば，それは $a_0, a_1, a_2, \cdots$ という ω-列をもって始まることになります．それで A が尽くされるのでなければ，$A \setminus \{\, a_n : n \in \omega \,\}$ が最小要素をもちます．これを A の ω 番目の要素 a_ω と呼ぶことができるでしょう．A の要素をリストアップするこのプロセス

が，A の要素が尽きるまで続けられ，A と順序数のある切片との間に 1 対 1 対応がつきます．このインフォーマルなプロセスがきちんと働くことは，定理 I.8.19 でフォーマルに証明されます．

ここで ω より長い $\mathbb{Q}$ の整列順序部分集合を例示するために，半開区間 $[0,1)$ に詰め込まれた $\mathbb{N}$ のコピーから出発しましょう．$A_0 = \{1 - 2^{-n} : n \in \omega\} \subseteq [0,1)$ は，型 ω の整列順序です．この集合より上の部分にはまだ余地がありますから，集合 $A_0 \cup \{1, 1.5\}$ をつくることができます．この集合の ω 番目の要素 a_ω は 1 で，その次の（そして最後の）要素が $a_{\omega+1} = 1.5$ です．このように続けていけば，半開区間 $[1,2)$ 中の ω 個の新しい要素を A_0 のあとにつけ加えることができます．さらに，$k \in \mathbb{N}$ に対して $A_k = \{k + 1 - 2^n : n \in \omega\}$ としましょう．すると，$A_0 \cup A_1 \subseteq [0,2)$ であってこれは型 $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ に整列順序づけされています．また，$\bigcup_{k \in \omega} A_k \subseteq \mathbb{Q}$ は型 $\omega \cdot \omega = \omega^2$ に整列順序づけされています．ところが $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ は同型なので，区間 $(0,1)$ の中に型 ω^2 の整列順序を見出すことができ，その上にさらに有理数の要素をつけ加えてゆくことができます．このようにして続けていけば，可算な整列順序はすべて $\mathbb{Q}$ に埋め込むことができます．（実は可算な全順序がすべてそうです．演習問題 I.11.36 と I.11.37 参照．）

演習問題 I.7.23　$<$ と $\prec$ がそれぞれ S と T の整列順序であるとき，それらの $S \times T$ 上の辞書式積は $S \times T$ の整列順序である．このことについて演習問題 I.7.13 も参照すること．

I.8　順序数

セクション I.6 のおわりに述べた循環を，ここで断ち切りましょう．

定義 I.8.1　z が**推移的集合**であるとは，$\forall y \in z [y \subseteq z]$，同じことだが $\forall x, y [x \in y \wedge y \in z \to x \in z]$ であることをいう．

定義 I.8.2　z が（フォン・ノイマン流）**順序数**であるとは，z が推移的集合であって，$\in$ によって整列順序づけされていることをいう．

定義 I.8.1 の「推移的集合」と定義 I.7.2 の「推移的関係」がどう関連して

いるのか見ておきましょう．$\in$ はわたくしたちの宇宙において推移的関係ではありません．つまり $\forall x, y, z[x \in y \wedge y \in z \to x \in z]$ は成立しません（$x = 0$，$y = \{0\}$，$z = \{\{0\}\}$ としてみなさい）．ただし，特定の z を**固定**すると，その z が推移的集合であることを主張する $\forall x, y[x \in y \wedge y \in z \to x \in z]$ が成立することも，成立しないこともあります．推移的集合のことを，「関係 $\in$ が推移性をもつ点」のように考えてもよいでしょう．推移的集合の二つの例として $\emptyset$ と $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ があります．

順序のいろいろの性質と違って，推移的集合の概念は初等数学には出てきません．たとえば $\mathbb{R}$ は推移的集合でしょうか．$y \in \mathbb{R}$ のときには y と $\mathbb{R}$ とは別種のオブジェクトと考えられますし，みなさんは y のことを集合だとはきっと思わないでしょうから，$y \subseteq \mathbb{R}$ かどうかという問い自体が思いもよらないでしょう．しかし，いまはすべてが集合なのですから，$\mathbb{R}$ に関する限り多少とも不自然ではありますが，この問いも有意味です（定義 I.15.4 で $\mathbb{R}$ を定義すると，これは偽とわかります）．いっぽう，自然数を扱うときには，自然数の要素は定義によりまた自然数なので，この問いは自然にあらわれることになります．たとえば $3 = \{0, 1, 2\}$ は推移的集合で，（$2 = \{0, 1\} \subseteq 3$ というように）その要素はどれもまた部分集合ですから，3 は $\in$ によって整列順序づけされた推移的集合，したがって順序数です．いっぽう，$z = \{1, 2, 3\}$ とおくと，z は $\in$ によって 3 と同じ**順序型**に整列順序づけされていますが，$1 \in z$ なのに $1 \not\subseteq z$（なぜなら $0 \in 1$ なのに $0 \notin z$）であって，推移的集合ではないので，z は順序数ではありません．このあとで，二つの異なる順序数は同型にならないこと（補題 I.8.18）を見ましょう．

定義にもとづいて 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 がいずれも順序数であることを直接に検証することができます．もっと効率のよい方法として，$0 = \emptyset$ が順序数であることは言うまでもなく，また順序数の後続者はまた順序数になります．演習問題 I.8.11 を見なさい．このことは，多少の準備のあとでなら，たやすく証明できます．

ここまでの例では順序数の全体がそれ自身一つの超限的な系列へと順序づけされていることが暗黙のうちに前提されていました．それぞれの順序数は自分より小さい順序数全体の集合ですから，この順序関係はまさに要素関係 $\in$ です．このインフォーマルな考え方を，これから一つの定理（I.8.5）にし

ます．この定理のおかげで，次にいう記法が便利になってきます．

記法 I.8.3　順序数を論じるとき，ギリシャ文字（とくに $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \xi, \mu$）は「順序数全体を動く」ものとする．すなわち，$\forall\alpha\varphi(\alpha)$ とは

$$\forall x \left[\, x \text{ が順序数である} \to \varphi(x) \,\right]$$

の簡略記法である．また $\alpha < \beta$ は $\alpha \in \beta$ を（定義により）意味し，$\alpha \leq \beta$ は $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ を意味する．

すべての順序数のなすクラス $ON = \{\, x : x \text{ は順序数}\}$ をインフォーマルに定義します．あとで ON が真クラスであること，つまり記法 I.6.9 にいうように，そんなものは存在しないことを見ましょう（定理 I.8.9）．これは集合であるには「大きすぎる」集まりなのです．それでも ON というインフォーマルな概念のおかげでいくつか有用な用語法が得られます．

記法 I.8.4

✈ $x \in ON$ とは「x が順序数である」の略記．

✈ $x \subseteq ON$ とは「$\forall y \in x[\, y$ は順序数である$\,]$」の略記．

✈ $x \cap ON$ とは「$\{\, y \in x : y$ は順序数である$\}$」の略記．

次の定理は ON が $\in$ によって整列順序づけされると言っています．実際には ON は存在しないわけですから，この定理が言っていることを正確に書き添えることにします．

定理 I.8.5　ON は $\in$ によって整列順序づけされる．すなわち，

（１）$\in$ は順序数上で推移的である：$\forall\alpha, \beta, \gamma[\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \to \alpha < \gamma]$.

（２）$\in$ は順序数上で非反射的である：$\forall\alpha[\alpha \not< \alpha]$.

（３）$\in$ は順序数上で三分律をみたす：$\forall\alpha, \beta[\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta]$.

（４）$\in$ は順序数上で整礎的である：順序数からなる空でない集合はどれも $\in$-最小要素をもつ．

この定理の前に，補題を三つ立てます．まず第 1 に，

補題 I.8.6　ON は推移的クラスである．すなわち，$\alpha \in ON$ かつ $z \in \alpha$ のときは $z \in ON$ となる．

【証明】 α が推移的集合なので $z \subseteq \alpha$ である．$\in$ は α を整列順序づけするので，α のどの部分集合も整列順序づけされる（演習問題 I.7.21）．そこで z が推移的集合であること，すなわち $x \in y \in z \to x \in z$ を示せばよい．$z \subseteq \alpha$ なので，$y \in \alpha$ であり，$y \subseteq \alpha$，したがって $x \in \alpha$ である．いま，$x, y, z \in \alpha$ となった．関係 $\in$ が α 上で推移的であること（これは「順序数」の定義に含まれている）から，$x \in y \in z \to x \in z$ である．□

この補題により，α の元をあらわすのにも通常はギリシャ文字を用いることにします．

補題 I.8.7　任意の順序数 α と β について，$\alpha \cap \beta$ も順序数である．

【証明】 $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ なので左辺も $\in$ によって整列順序づけされている（演習問題 I.7.21）．また，（定義から明らかに）推移的集合の集まりの共通部分は，また推移的集合である．□

定理 I.8.5 が証明されれば，実は $\alpha \cap \beta$ が α と β のうち小さいほうであることがたやすく見てとれます（演習問題 I.8.10）．

順序数上の $<$ とは，定義により $\in$ です．補題の三つ目は，$\leq$ が $\subseteq$ である，というものです．順序数は自分より小さい順序数全体の集合なのですから，定理 I.8.5 の視点からはこの補題は自明なのですが，その定理を示すための補題として直接証明するのですから，もう少し手間がかかります．

補題 I.8.8　任意の順序数 α と β について $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ となる．

【証明】 $\leftarrow$ については β が推移的であるという事実を用いるだけ．

$\to$ について： $\alpha \subseteq \beta$ かつ $\alpha \neq \beta$ と仮定する．$\alpha \in \beta$ となることを示そう．$X = \beta \setminus \alpha$ とおく．すると，$X \neq \emptyset$ なので X の $\in$-最小要素を ξ とする．$\xi \in \beta$ であるから，$\xi = \alpha$ を示せば目的は果たされる．

いま $\mu \in \xi$ とすると，（β が推移的であることから）$\mu \in \beta$ であり（ξ が $\in$-最小であったことから）$\mu \notin X$ であるから $\mu \in \alpha$ である．したがって $\xi \subseteq \alpha$ である．

つぎに $\xi \subsetneq \alpha$ だったと仮定しよう．$\mu \in \alpha \setminus \xi$ とする．このとき，$\mu, \xi \in \beta$ であり，β は $\in$ によって整列順序づけされているので $\mu \notin \xi$ から $\mu = \xi$ ま

たは $\xi \in \mu$ となる．いっぽう（$\xi \in X$ なので）$\xi \notin \alpha$ でもある．そこで $\mu = \xi$ だとすると $\mu \in \alpha$ と矛盾する．また，$\xi \in \mu$ とすると，α は推移的だから $\xi \in \mu \in \alpha \to \xi \in \alpha$ となり，これも矛盾する．□

【定理 I.8.5 の証明】　(1) は γ が推移的集合であること，$\beta \in \gamma \to \beta \subseteq \gamma$ を言いなおしているだけ．(2) は $\in$ が α 上非反射的であることによる：すべての $x \in \alpha$ について $x \notin x$ であるから $\alpha \in \alpha$ とすると矛盾する．

(3) について，$\delta = \alpha \cap \beta$ とおく．補題 I.8.7 によって δ は順序数である．$\delta \subseteq \alpha$ かつ $\delta \subseteq \beta$ なので，補題 I.8.8 により，$\delta \in \alpha$ または $\delta = \alpha$ であるし，$\delta \in \beta$ または $\delta = \beta$ である．もしも $\delta = \alpha$ か $\delta = \beta$ であれば目的は果たされる．そうでないとすれば $\delta \in \alpha$ であり $\delta \in \beta$ であることから $\delta \in \delta$ となり，(2) と矛盾する．

(4) について，X を順序数の空でない集合としその要素 α をとる．この α が最小ならそれでよい．そうでないとすると，$\alpha \cap X = \{\xi \in X : \xi < \alpha\} \neq \emptyset$ であって α が $\in$ によって整列順序づけされているので，$\alpha \cap X$ は最小要素 ξ をもつ．この ξ はまた X の最小要素でもある．□

定理 I.8.9　ON は真クラスである．いいかえれば，どんな集合もすべての順序数を含むことはない．

【証明】　もしもすべての順序数が集合 X に属するなら，順序数全体の集合 $ON = \{y \in X : y \text{ は順序数である}\}$ が得られる．補題 I.8.6 と定理 I.8.5 により ON も一つの順序数となるから，$ON \in ON$ であって定理 I.8.5 の (2) と矛盾する．□

ここで得られる矛盾は「ブラリ=フォルティのパラドックス」（1897 年）として知られています．もちろんこれは 1923 年のフォン・ノイマン流順序数より前の話です．ブラリ=フォルティはカントールの素朴集合論で考え，すべての整列順序を合わせることで，自分自身をふくめてすべての整列順序よりも真に長い整列順序を構成し矛盾に至ったのでした．

演習問題 I.8.10　α と β を順序数とするとき，$\alpha \cup \beta$ と $\alpha \cap \beta$ も順序数であって，$\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$ であり $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$ である．X を順序数の空でない集合とするとき，$\bigcap X$ と $\bigcup X$ も順序数であって，$\bigcap X =$

$\min(X)$ であり $\bigcup X = \sup(X)$ である．

[ヒント]　X が最小要素をもつことはすでにわかっているので，それを $\bigcap X$ と同定するために $\le$ が $\subseteq$ であることを用いればよい．$\bigcup X$ が順序数であることはただちに確かめられる．X が最大要素をもつとは限らないので，$\bigcup X$ が X に属するとは限らない．「$\bigcup X = \sup(X)$」という言明は，$\bigcup X$ が X の上限すなわち最小上界であるということ，つまり $\bigcup X$ がすべての $\xi \in X$ に対して $\alpha \ge \xi$ をみたす最小の順序数 α であることということを簡略に記したものである．□

定義 I.6.22 では $S(x) = x \cup \{x\}$ のことを「順序数の後続者函数」と呼びました．これで $S(\alpha)$ が本当に後続順序数，すなわち α より大きい順序数のうち最小のものであることが，検証できるようになりました．

演習問題 I.8.11　α を任意の順序数とするとき，$S(\alpha)$ は順序数であり，$\alpha < S(\alpha)$ であって，すべての順序数 γ について $\gamma < S(\alpha)$ と $\gamma \le \alpha$ が同値となる．

[ヒント]　$S(\alpha)$ が順序数であることを確かめられさえすれば，残りのことは $<$ を $\in$ に，$\le$ を「$\in$ または $=$」に置きかえればただちにわかる．□

クラス $ON \setminus \{0\}$ を後続者と極限に二分します．

定義 I.8.12　順序数 β について，

✏ ある α について $\beta = S(\alpha)$ であるとき β を**後続型順序数**という．

✏ $\beta \ne 0$ であって β が後続型順序数でないとき β を**極限順序数**という．

✏ $\alpha \le \beta$ である α がすべて 0 か後続型順序数であるとき，β を**有限順序数**あるいは**自然数**という．

そこで 5 は有限です．なぜなら 0, 1, 2, 3, 4, 5 のいずれも 0 であるかあるいは何か他の順序数の後続者だからです．自然数全体の集合は，順序数全体のはじめの一区画，すなわち始切片をなします．

演習問題 I.8.13　n が自然数であれば，$S(n)$ もまた自然数であり，また n の要素はどれもまた自然数である．

インフォーマルには，ω は自然数全体の集合です．ただし，まだわたくし

たちは，そんな集合があるということの証明を済ませていません．

定理 I.8.14（通常帰納法の原理）集合 X について，もしも $\emptyset \in X$ かつ $\forall y \in X(S(y) \in X)$ であるなら，X はすべての自然数を含む．

【証明】 n が自然数だが $n \notin X$ であったと仮定しよう．$Y = S(n) \setminus X$ とおく．Y は（演習問題 I.8.13 により）自然数の集合であり，（$n \in Y$ なので）空ではないから，（定理 I.8.5 の(4)によって）最小要素 $k \leq n$ をもつ．k は自然数だから，0 であるか後続型順序数である．しかし，$0 \in X$ なのだから $k \neq 0$ であって，ある i について $k = S(i)$ となる．（k が最小であったから）$i \notin Y$ であって，$i \in X$ となる．すると $k = S(i) \in X$ となって矛盾する． □

無限の公理（セクション I.2 参照）は，まさしく，この定理の前提条件をみたす集合 X が存在する，というものです．このとき X はすべての自然数を含むので，$\{n \in X : n \text{ は自然数}\}$ が自然数全体のなす集合になります．これで，次の定義の正当性が保証されます．

定義 I.8.15 ω とは自然数全体の集合のことである．

ここに示した定理 I.8.14 の証明は少々かっこ悪かったですね．これを，$\omega \setminus X$ の最小要素を考えると矛盾するから $\omega \subseteq X$ だ，と言えればもっとエレガントになったことでしょうが，集合 ω が存在することの保証に定理 I.8.14 を用いたかったのですから，そういうわけにもいかなかったのです．

無限の公理は ω が存在するという主張と同値です．公理の「公式バージョン」としては，必要とされる概念が少なく，$\emptyset$ と後続者函数さえあればよくて順序数の理論がなくて済むものを採用しました．

帰納法は証明の手順としてよく用いられます．$\forall n \in \omega\, \varphi(n)$ を証明するには $\varphi(0)$（基点）と $\forall n \in \omega[\varphi(n) \to \varphi(S(n))]$（帰納法のステップ）を示せば十分で，あとは $X = \{n \in \omega : \varphi(n)\}$ に通常帰納法の原理を適用すればよいのです．

自然数全体の集合 ω は，また最小の極限順序数でもあります．この集合が一つの順序数であることの検証には次の結果を用います．

補題 I.8.16 X は順序数の集合であり，ON の始切片であったと仮定し

よう：

$$\forall\beta \in X \forall\alpha < \beta[\, \alpha \in X\,]. \tag{$*$}$$

このとき $X \in ON$ である．

【証明】 定理 I.8.5 から X が $\in$ によって整列順序づけされていることが導かれる．また $(*)$ はちょうど各 $\beta \in X$ が X の部分集合であることを意味している．すなわち，X は推移的集合である．□

補題 I.8.17　ω は最小の極限順序数である．

【証明】 補題 I.8.13 により，ω は ON の始切片である．だから ω は順序数である．ω は空集合つまり 0 ではなく，また補題 I.8.13 により後続型順序数でもない．ω より小さい（ω に属する）順序数は自然数であるから極限順序数ではない．□

初等的な数学で $\forall\xi \in \omega\varphi(\xi)$ の形の定理の証明に用いられる帰納法には 2 とおりの基本タイプがあります．**通常帰納法**は ω 特有のものです．**超限帰納法**またの名を**最小原理**は，$\neg\varphi(\xi)$ であるような最小の ξ について調べて矛盾を導き出します．この論法の正当性は ω が整列順序づけされていることによるのですから，ω を他の任意の順序数に置きかえても同じく有効なのです．このことを定理 I.8.18 の証明で利用します．実は ω を ON に置きかえることもできます（定理 I.9.1 参照）．

さて，これでこれまでよりももっと先まで数えあげが進むようになりました．

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \omega,\ S(\omega),\ S(S(\omega)),\ S(S(S(\omega))),\ \cdots$$

いまのところまだ足し算 $+$ を定義していませんが，この $S(S(S(\omega)))$ はふつうは $\omega+3$ と呼ばれているものです．インフォーマルな話として，すべての $n \in \omega$ に対する $\omega+n$ をすべて数えつくしてしまったら，次には $\omega+\omega$ すなわち $\omega\cdot 2$ に到達します．つまり，$\omega\cdot 2$ は系列

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots,\ \omega+n,\ \cdots \qquad (n \in \omega)$$

の後にひかえる最初の順序数というわけです．これをフォーマルに述べるには $+$ と $\cdot$ の定義が必要です．実をいうと，$\cdot$ のほうが簡単です．$\alpha\cdot\beta$ とは，

$\beta \times \alpha$ に辞書式の順序づけをしたものと同型な順序数です．この辞書式順序が整列順序であることは演習問題 I.7.23 でみたとおりです．そこでたとえば $\omega \cdot 2$ を得るには $\{0,1\} \times \omega$ 上の辞書式の整列順序をみて，セクション I.5 でやったようにそれを数えあげるのです．

$$\begin{array}{cccccccccccc} (0,0) & (0,1) & \cdots & (0,n) & \cdots & (1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & n & \cdots & \omega & \omega+1 & \omega+2 & \cdots & \omega+n & \cdots \end{array}$$

こうして，$\{0,1\} \times \omega$ と同型に γ が（ということは，γ 未満の順序数全体が）整列順序づけされるような順序数 γ を構成し，その γ を $\omega \cdot 2$ と呼ぶわけです．

しかしここで，こう意図したとおり正当に $\alpha \cdot \beta$ が定義できることを保証するには，どんな整列順序集合もある順序数と同型であること（定理 I.8.19）を示さねばなりません．まず，二つの異なる順序数が同型にならないことを見ましょう．

補題 I.8.18　α と β が順序数で，函数 $f\colon \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \beta$ が $(\alpha; <)$ から $(\beta; <)$ への同型写像であれば，f は恒等函数であり $\alpha = \beta$ である．

【証明】　$\xi \in \alpha$ とすると $f(\xi) \in \beta$ である．全順序集合と考えると，同型写像 f は ξ 未満の要素全体を $f(\xi)$ 未満の要素全体にうつすので，

$$\{\nu : \nu \in \beta \wedge \nu < f(\xi)\} = \{f(\mu) : \mu \in \alpha \wedge \mu < \xi\}$$

となっている．ところで $<$ は要素関係であり，α と β は推移的集合なので，この式はもっと単純に

$$f(\xi) = \{f(\mu) : \mu \in \xi\} \tag{†}$$

と書ける．では，ξ に関する超限帰納法で $f(\xi) = \xi$ を証明することにしよう．そのために $X = \{\xi \in \alpha : f(\xi) \neq \xi\}$ とおく．$X = \emptyset$ であれば目的は果たされる．$X \neq \emptyset$ だとしたら，ξ を X の最小の要素としなさい．すると $\mu < \xi$ のとき $f(\mu) = \mu$ であるから，(†) によって $f(\xi)$ は $\{\mu : \mu < \xi\}$ つまり ξ になって，$\xi \in X$ に矛盾する．　□

この補題を $\alpha = \beta$ のときに適用すると，$(\alpha; <)$ が恒等函数以外には自己同型写像をもたないことがわかります．

定理 I.8.19　R が集合 A を整列順序づけしているなら，$(A; R) \cong (\alpha; \in)$

をみたす $\alpha \in ON$ がただ一つ存在する．

【証明】　ただ一つという部分は補題 I.8.18 からただちにわかる．インフォーマルに言えば，A を小さいほうから始めて例 I.7.22 のように数えあげてゆくことで α の存在が証明される．しかし「数えあげること」というフォーマルな概念はないので，わたくしたちは少々違った道筋をたどることになる．

各要素 $a \in A$ に対して $a{\downarrow} = \{\, x \in A : xRa \,\}$ としよう．このとき $a{\downarrow}$ も R によって整列順序づけされている．定理が $a{\downarrow}$ に対して成立しているならば，つまりある順序数 ξ について $(a{\downarrow}; R) \cong (\xi; \in)$ が成立するならば，要素 $a \in A$ は**良性**だということにしよう．このとき補題 I.8.18 により，この ξ は一意に決まることに注意する．A の良性の要素全体を G する．$(a{\downarrow}; R) \cong (\xi; \in)$ をみたすただ一つの ξ を $f(a)$ とすることで，G を定義域とする函数 f を定める．この定義の正当性は置換公理によって保証される（補題 I.7.9 参照）．補題 I.8.18 からは，各 $a \in G$ に対して $(a{\downarrow}; R)$ から $(f(a); \in)$ の上への同型写像がただ一つに定まることがわかる．というのも，同型写像が h と k の 2 つあったら，$h \circ k^{-1}$ は $(f(a); \in)$ の自明でない自己同型写像になってしまうだろうから．そこで各 $a \in G$ に対してこのただ一つの同型写像を h_a と書こう．

たとえば A に 4 つ以上の元があったとし，その最初の 4 つを a_0, a_1, a_2, a_3 としよう．すると同型写像 $h_{a_3} = \{\, (a_0, 0), (a_1, 1), (a_2, 2) \,\}$ によって $a_3{\downarrow}$ が $3 = \{0, 1, 2\}$ の上にうつるので，a_3 は良性で $f(a_3) = 3$ である．同じ理由で a_0 は良性で $f(a_0) = 0$ となる．空な同型写像 $h_{a_0} = \emptyset$ が $a_0{\downarrow} = \emptyset$ を $0 = \emptyset$ の上にうつすからである．同じ理由で a_1 も a_2 も良性で，それぞれ $f(a_1) = 1$，$f(a_2) = 2$ となる．ここで，それぞれの同型写像 h_{a_i} が $f{\restriction}(a_i{\downarrow})$ と同じであることに注意しよう．

より一般には，

$$\forall a \in G \forall c \in a{\downarrow}\, [\, c \in G \wedge h_c = h_a{\restriction}(c{\downarrow}) \wedge f(c) = h_a(c) \,] \qquad (❀)$$

つまり $a \in G$ かつ cRa のとき，$h_a{\restriction}(c{\downarrow})$ は $c{\downarrow}$ から $h_a(c)$ の上への同型写像であるから $c \in G$ であって，h_c は $h_a{\restriction}(c{\downarrow})$ に等しく，その値域は $h_a(c)$ なので $f(c) = h_a(c)$ となる．

したがって，函数 $f\colon G \to ON$ は順序保存である．つまり cRa のとき

$f(c)$ すなわち $h_a(c)$ が $f(a)$ の元なので $cRa \to f(c) < f(a)$ である．また $\mathrm{ran}(f)$ は ON の始切片である．なぜなら $\xi = f(a) = \mathrm{ran}(h_a)$ とすると，どの $\eta < \xi$ もある cRa について $h_a(c) = f(c)$ という形になるから．こうして $\alpha = \mathrm{ran}(f)$ とおけば補題 I.8.16 により α は順序数であり，f は G から α の上への同型写像である．

ここで $G = A$ であれば目的は果たされる．そうなっていないと仮定して e を $A \setminus G$ の最小要素としよう．すると，(❀) より G は A の始切片であるから $G = e{\downarrow}$ であり，したがって $(e{\downarrow}; R) \cong (\alpha; \in)$ だから $e \in G$ となって矛盾する．□

定義 I.8.20　R が A を整列順序づけするとき，$\mathrm{type}(A; R)$ とは $(A; R) \cong (\alpha; \in)$ が成立するただ一つの順序数 α のことである．R が文脈から明らかなときには $\mathrm{type}(A)$ と書いたり，A が文脈から明らかなときには $\mathrm{type}(R)$ と書くこともある．

ですから自然数の通常の順序を考えていることがわかっている場合には $\mathrm{type}\{n \in \omega : n > 0\} = \omega$ と書くのです．いっぽう，R が ω のうち 0 をてっぺんに置いて他の数を通常どおりに順序づけした整列順序 $(1, 2, 3, 4, \cdots, 0)$ であって，ω 上のいろいろな整列順序について議論していることがわかっているのであれば，$\mathrm{type}(R) = \omega + 1$ と書くことになります．

定義 I.8.21　$\alpha \cdot \beta = \mathrm{type}(\beta \times \alpha)$，$\alpha + \beta = \mathrm{type}(\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta)$ とする．どちらの場合も，順序数の順序対の比較には辞書式順序を用いている．

たとえば $\omega + \omega = \omega \cdot 2 = \mathrm{type}(\{0, 1\} \times \omega)$ で，この整列順序は ω の一つのコピーと，その上に連なる ω のもう一つのコピーからなります．

さて，こうして順序数の「算術」というものを手にしたのですから，それがどんな性質をもつものかと問うのは理にかなったことです．58 ページの表 I.1 にそうした性質を要約してありますが，これらすべての意味がはっきりするまでには，このセクションと次のセクションでもう少々の議論が必要になりますので，それを済ませ，証明の大部分は演習問題として残すことにします．

自然数の算術の標準的な事実のうちいくつかは順序数にまで拡張されます

表 I.1　順序数の算術

結合律	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
¬ 交換律	$1+\omega=\omega<\omega+1$; $2\cdot\omega=\omega<\omega\cdot 2$
左分配律	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
¬ 右分配律	$(1+1)\cdot\omega=\omega<\omega+\omega=1\cdot\omega+1\cdot\omega$
0 と 1	$S(\alpha)=\alpha+1$
	$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$; $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$; $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$
	$\alpha^0=1$; $\alpha^1=\alpha$; $1^\alpha=1$
	$\alpha>0\to 0^\alpha=0$
左消去律	$\alpha+\beta=\alpha+\gamma\to\beta=\gamma$
	$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma\wedge\alpha\neq 0\to\beta=\gamma$
¬ 右消去律	$1+\omega=2+\omega=1\cdot\omega=2\cdot\omega=\omega$
減算	$\alpha\leq\beta\to\exists!\gamma(\alpha+\gamma=\beta)$
除算	$\alpha>0\to\exists!\gamma\delta(\alpha\cdot\gamma+\delta=\beta\wedge\delta<\alpha)$
指数計算	$\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$; $\alpha^{\beta\cdot\gamma}=(\alpha^\beta)^\gamma$
対数	$\alpha>1\wedge\beta>0\to\exists!\gamma\delta\xi(\beta=\alpha^\delta\cdot\xi+\gamma\wedge\xi<\alpha\wedge\gamma<\alpha^\delta\wedge\xi>0)$
	有限順序数の場合は $\delta=\lfloor\log_\alpha\beta\rfloor$
	たとえば $873=10^2\cdot 8+73\wedge 8<10\wedge 73<10^2$
大小	$\beta<\gamma\to\alpha+\beta<\alpha+\gamma\wedge\beta+\alpha\leq\gamma+\alpha$
	$\beta<\gamma\wedge\alpha>0\to\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma\wedge\beta\cdot\alpha\leq\gamma\cdot\alpha$
	$\beta<\gamma\wedge\alpha>1\to\alpha^\beta<\alpha^\gamma\wedge\beta^\alpha\leq\gamma^\alpha$
	$2<3$ だが $2+\omega=3+\omega=2\cdot\omega=3\cdot\omega=2^\omega=3^\omega=\omega$
再帰的な計算	
	$\alpha+0=\alpha$　$\alpha+S(\beta)=S(\alpha+\beta)$　$\alpha+\gamma=\sup_{\beta<\gamma}(\alpha+\beta)$ (γ は極限順序数)
	$\alpha\cdot 0=0$　$\alpha\cdot S(\beta)=\alpha\cdot\beta+\alpha$　$\alpha\cdot\gamma=\sup_{\beta<\gamma}(\alpha\cdot\beta)$ (γ は極限順序数)
	$\alpha^0=1$　$\alpha^{S(\beta)}=\alpha^\beta\cdot\alpha$　$\alpha^\gamma=\sup_{\beta<\gamma}(\alpha^\beta)$ (γ は極限順序数)
連続性	函数 $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, α^β のいずれも β について連続であるが α については連続でない.

し，いくつかは拡張されません．たとえば $+$ も $\cdot$ も結合律をみたしますが交換律はみたしません．$1+\omega=\omega$ だけれども $\omega+1=S(\omega)>\omega$ ですし，$2\cdot\omega=\omega$ だけれども $\omega\cdot 2=\omega+\omega>\omega$ なのです．

表 I.1 の「再帰的な計算」とは正確にはどういうことでしょうか．$+$ と $\cdot$ についての 2 行は，定義（I.8.21）からたやすくわかる事実を書いているだけです．インフォーマルにいうと，これらはまた，計算が超限的に延長されるという観点から，この二つの函数の値の計算法を図式化したものでもあります．α は固定されているものとしましょう．$\alpha+\beta$ を計算するにあたって，$\alpha+0=\alpha$ であることを告げられ，また $\alpha+\beta$ から $\alpha+S(\beta)$ を得る方法を告げられたので，$\alpha+1,\alpha+2,\cdots$ と次々に計算してゆくことができます．そして ω は極限順序数であり，第 ω 段階では $\alpha+\omega$ を $\sup\limits_{n<\omega}(\alpha+n)$ として求めればよいことを，わたくしたちは知っているわけです（この sup は $\bigcup$ のことです．演習問題 I.8.10 参照）．こんどは $\alpha+(\omega+1),\alpha+(\omega+2),\cdots$ の計算へと進むことができ，それから第 $\omega+\omega$ 段階では $\alpha+(\omega+\omega)$ を計算できます．一般には第 β 段階で $\alpha+\beta$ を計算します．ひとたび $+$ の計算法がわかってしまえば，2 行めを見て $\alpha\cdot 0$, $\alpha\cdot 1$, $\alpha\cdot 2$, $\cdots$ と順に β まで計算を続けてゆくことで $\alpha\cdot\beta$ を計算する方法がわかります．

わたくしたちは $+$ と $\cdot$ のまったく申しぶんのない定義をすでに手に入れているのですから，上のような議論はあくまでインフォーマルなものとみなしたい気持ちになるかもしれませんが，他の函数のうちには，たとえば指数計算 α^β のように，再帰的な定義こそが最も自然であるものも存在します．セクション I.9 では再帰をよりフォーマルにとりあげ，とくに指数計算の定義の正当性を確かめます．

表 I.1 の「連続性」という項目についてひとこと．これを精密にするには，ON が集合でないので，いくらか用心しなければならない点はありますが，ON を順序位相のもとで位相空間とみなす方法があります．また別の方法としては，定義された函数 $F\colon ON\to ON$ が非減少函数（$\beta_1<\beta_2\to F(\beta_1)\le F(\beta_2)$）であるとき，$F$ が連続であるとは，どんな極限順序数 γ についても $F(\gamma)=\sup\limits_{\beta<\gamma}F(\beta)$ となることだ，と定義してもいいのです．α を固定しておいて $F(\beta)$ を $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, α^β のいずれかとすれば，「再帰的な計算」の

項目から明らかなとおり，F は連続です．ところが，函数 $\beta+\omega$ も $\beta\cdot\omega$ も β^ω も連続になりません．これは $\gamma=\omega$ として $1<n<\omega$ なら $n+\omega=n\cdot\omega=n^\omega=\omega$ なのに $\omega<\omega+\omega<\omega\cdot\omega<\omega^\omega$ であることからわかります．

順序数 ω と有限順序数とを用いると，和と積をとることで，すいぶん多くの順序数を定義できます．それらはすべて可算順序数になります（演習問題 I.11.34 を参照）．たとえば $\omega\cdot\omega$ は $\omega\times\omega$ と同型だったので，可算集合 $\omega\times\omega$ と 1 対 1 対応しているわけです．可算順序数をすべて数えきってしまったあとには，きっと不可算順序数に到達することでしょう．最初の不可算順序数は ω_1 と呼ばれることになります．可算順序数と不可算順序数については，さらにセクション I.11 であつかいます．

演習問題 I.8.22　R が A を整列順序づけしていて $X\subseteq A$ であれば，R は X を整列順序づけし（I.7.21 参照），さらに $\mathrm{type}(X;R)\le\mathrm{type}(A;R)$ となる．

［ヒント］　定理 I.8.19 を適用すれば，A は順序数 α であり，R は通常の順序 $<$ すなわち要素関係 $\in$ であるとしても一般性は損なわれない．$(X;<)$ からある順序数 $\delta=\mathrm{type}(X;<)$ の上への同型写像を f とし，ξ に関する超限帰納法によって $f(\xi)\le\xi$ を証明しなさい．　□

順序数 $\omega+\omega$ の存在を証明するには（定理 I.8.19 の証明を通じて）置換公理が必要となることを指摘しておきます．セクション I.2 で定義したツェルメロ集合論 ZC では，集合 $2\times\omega$ やその上の辞書式順序を作ることはできるのに，$\omega+\omega$ の存在は証明できないのです．ツェルメロがこの仕事をしたのはフォン・ノイマン流順序数が定義されるより前のことであり，そのころはこれでとくに問題にはなりませんでした．こんにちわたくしたちが順序数 $\omega+\omega$ を使っている場面では，ツェルメロは $2\times\omega$ のようにこの型に整列順序づけされたなんらかの（任意の）集合を利用したことでしょう．

実はツェルメロは自然数全体の集合としてはわたくしたちの ω ではなく $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\cdots\}$ を考えており，**彼の**無限の公理は**彼の**自然数全体の集合の存在を保証しようとするものでした．これら 2 とおりの無限の公理は同値ではありますが，そのことの証明には（ツェルメロの集合論にはない）置換公理を用いる必要があります．

演習問題 I.8.23　ZF から公理 7（無限の公理）を除いた公理系において次の二つが同値であることを証明しなさい．

（1）公理 7.

（2）ツェルメロの "Axiom des Unendlichen": $\exists w[\emptyset \in w \wedge \forall y \in w (\{y\} \in w)]$.

［ヒント］(1) → (2) について：ω が存在するので，これに置換公理を適用できる．このときの $\varphi(x, y)$ は，たとえば $\varphi(3, y)$ ならば $y = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ を意味するようなものとする．これをフォーマルに書きあらわすには，$\varphi(x, y)$ は「$x \in \omega$ かつ $x+1$ を定義域とするある函数 f について $f(x) = y$，$f(0) = \emptyset$ かつ各 n について $f(n+1) = \{f(n)\}$ である」と主張するようにする．次のセクションではこれに類似の戦術が再帰的定義の正当性の証明に用いられる．□

I.9　順序数についての帰納法と再帰

帰納と再帰という二つの概念は関連しあっていて，両者を混同している文献もありますが，同じものではありません．帰納法は証明の方法で，再帰は函数の定義の方法です．すでに ω 上の通常帰納法（定理 I.8.14）をわたくしたちは手にしています．いっぽう，再帰は階乗函数（!）の

$$0! = 1\ ;\quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

のような定義が正当であることを保証してくれます．

まずは帰納法についてもう少し．通常帰納法は ω に特有のものですが，**超限帰納法**は 54 ページで論じたとおり，どんな順序数に対しても用いられる最小原理の一般化です．α を順序数とするとき，α のどんな空でない部分集合も最小要素をもちます．これは整列順序の定義そのものです．証明の方法としては，$\neg\varphi(\xi)$ となる最小の $\xi < \alpha$ から矛盾を導き出すことで，$\forall \xi < \alpha \varphi(\xi)$ を証明するのです．この論法は $\alpha = \omega$ のときにはおなじみのものでしょうが，補題 I.8.18 や演習問題 I.8.22 の証明では，任意の α について利用しました．「真クラス風味」の超限帰納法を用いれば，すべての順序数に関する定理を一挙に証明できます．

定理 I.9.1（ON 上の超限帰納法）　各論理式 $\psi(\alpha)$ について，少なくとも一

つの α で $\psi(\alpha)$ が成立するならば，$\psi(\xi)$ となる最小の ξ が存在する．

【証明】 $\psi(\alpha)$ となる一つの α を考える．この α が最小なら目的は果される．そうでないとすると，集合 $X := \{\xi < \alpha : \psi(\xi)\}$ が空でない．X の最小元 ξ は，$\psi(\xi)$ となる最小の ξ である．□

これが実際にはサブセクション I.7.2 で論じた定理図式の一つであることに注意しましょう．フォーマルには，わたくしたちはメタ理論において，各論理式 $\psi(\alpha)$ ごとに，論理式

$$\exists\alpha\psi(\alpha) \to \exists\alpha[\,\psi(\alpha) \land \forall\xi < \alpha[\neg\psi(\xi)]\,]$$

の全称閉包（すべての自由変数を全称量化子 $\forall$ で量化したもの）が集合論の公理系から証明できると主張していることになります．

さて次は再帰ですが，これも帰納法と同様にいくつもの風味のものがあります．コンピュータの世界では，函数 $f(x)$ の定義が他の y についての $f(y)$ の評価を必要とする形になっているものは何であれ，**再帰**と呼んでいます．いっぽう，集合論では，$f(x)$ の定義に x **より小さい**（一つまたは複数の）y についての $f(y)$ の評価が必要になりうる**原始再帰**と呼ばれる特別な形しか用いられません．たとえば次のようなフィボナッチ数列の定義

$$f(0) = f(1) = 1 \ \ ; \ \ x > 1 \text{ のとき } f(x) = f(x-1) + f(x-2)$$

は合法的であると誰もが認めます．ここでは $f(x)$ の評価には $x > 1$ のときは直前の 2 つの値を知る必要があり，$x \leq 1$ のときは要求される直前の値はゼロ個です．この定義の正当性はインフォーマルには

x	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(x)$	1	1	2	3	5	8	$\cdots$

という表の値を左から右へ埋めてゆけることから確かめられます．

このあとわたくしたちは，「この一般形」の定義が合法的である主張する定理（I.9.2）を証明しますが，その前に「この一般形」とは何のことかを言わなくてはなりません．粗く言うと，G を与えられた函数として，函数 f を

$$f(\xi) = G(f{\restriction}\xi) \tag{$*$}$$

という調理法で定義します．定義 I.7.4 によれば $f{\restriction}\xi$ とは函数 f を ξ 未満の順序数へ制限したものであって，函数 G はこの $f{\restriction}\xi$ からいかにして $f(\xi)$

を計算するかを教えてくれるわけです．フィボナッチ数列の場合は，ξ はつねに ω に属するので，$G_{\mathrm{fib}}(s)$ を，s がある自然数 $x \geq 2$ 上の函数であるときには $G_{\mathrm{fib}}(s) = s(x-1) + s(x-2)$ と定め，それ以外のすべての場合に $G_{\mathrm{fib}}(s) = 1$ と定めることができるでしょう．たとえば上記の表には $f{\restriction}6$ が示されていて，G_{fib} はこの表から $f(6)$ を $f(5) + f(4) = 8 + 5 = 13$ と定めるべきだ，と教えてくれます．

フィボナッチ数は ω の要素に対してのみ定義されるのですが，もっと大きな順序数上の函数や，あるいはすべての順序数に対する函数をも，この同じ図式 $(*)$ を用いて定義してよいのです．例として，表 I.1 の順序数の指数計算の再帰的定義を考えてみます： $\alpha^0 = 1$; $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$; γ が極限順序数のときは $\alpha^\gamma = \sup_{\beta<\gamma} \alpha^\beta$ でした．底 α を固定して函数 $E_\alpha(\xi) = \alpha^\xi$ を $(*)$ によって $E_\alpha(\xi) = G_\alpha(E_\alpha{\restriction}\xi)$ と定義するとしましょう．このときは $G_\alpha(s)$ を，s がある順序数 ξ 上の函数のときには

$$G_\alpha(s) = \begin{cases} 1 & \xi = 0 \text{ のとき} \\ s(\beta) \cdot \alpha & \xi = \beta + 1 \text{ のとき} \\ \sup\limits_{\beta<\xi} s(\beta) & \xi \text{ が極限順序数のとき} \end{cases}$$

と定め，それ以外のすべての場合に $G_\alpha(s) = 0$ と定めることができます．

定理 I.9.2 はこの E_α のようにすべての順序数に定義された函数のことだけを述べています．特定の順序数上の函数を得るにはその順序数に話を制限すればよいのです．先ほどの G_{fib} をあの言葉どおりに定めると，$f(\xi) = G_{\mathrm{fib}}(f{\restriction}\xi)$ という処方はすべての ξ に対して意味をなし，$\xi \geq \omega$ のときは $f{\restriction}\xi$ が自然数を定義域とする函数ではないので，$f(\xi) = 1$ となります．

よく知られた例をもう一つ．函数 $h\colon A \to A$ が与えられたとき，$n \in \omega$ に対して h^n はたとえば $h^0(a) = a$, $h^3(a) = h(h(h(a)))$ のように函数 h を n 回くり返したものをあらわします．無限順序数 ξ に対する h^ξ にどう意味づけするかについては広く受け入れられている定義はありません．ここで A と h を固定して h^n を n に依存するものとしましょう．h^n を $F(n)$ と書いたとして，この函数 F を n について再帰で定義しようというのです．調理法 $(*)$ において，$G(s)$ を，s がある自然数 $x \geq 1$ 上の函数である

ときには $G(s) = h \circ s(x-1)$ と定め，それ以外のすべての場合には A 上の恒等函数すなわち $\{\langle x, y\rangle \in A \times A : x = y\}$ と定めます．このように定めた G によれば，$\xi \geq \omega$ のとき h^ξ は A 上の恒等函数になります．実用上これらの h^ξ はまったく用いられず，わたくしたちとしては $F{\restriction}\omega$ のことだけを気にしているわけですが，こうした「のことだけ」について別の定理を立てるには及ばないので，一つの定理だけを証明します．

わたくしたちの定義する函数はすべての順序数に対して定義されているのですから，これを順序対の集合とみなすことはできず，論理式で書かれた規則と考えねばなりません（サブセクション I.7.2 参照）．そこで定理のフォーマルな言明においては，G はある論理式 $\varphi(s, y)$ で定義され，再帰で定まる函数 F も別のある論理式 $\psi(\xi, y)$ で定義されます．

定理 I.9.2（ON **上の原始再帰**）　論理式 $\varphi(s, y)$ について $\forall s \exists ! y \varphi(s, y)$ であるものとし，s に対して $\varphi(s, y)$ をみたすただ一つの y を $G(s)$ と定めよう．このとき論理式 ψ を次のように定めることができる．

（1）$\forall x \exists ! y \psi(x, y)$，したがって $\psi(x, y)$ をみたすただ一つの y を $F(x)$ とすることで ψ は函数 F を定める．さらにこのとき，

（2）$\forall \xi \in ON [F(\xi) = G(F{\restriction}\xi)]$ となる．

《注意書き》 定理をフォーマルに述べるにあたって $G(s)$ はすべての s に対して定義されているものとしましたが，$F(\xi)$ の計算にさいしては，順序数上の函数の計算に関係がある（つまり，ある順序数を定義域とする函数であるような）s についての $G(s)$ だけが利用されます．これまでにあげた例のように，「関心のない」s に対しては $G(s)$ はなにか既定の値をとるようにしておけばよいので，このことは問題になりません．同様に，再帰で定義される F は順序数に対してだけ定義されているとわたくしたちは「考えている」のですが，条項(1)は $\forall x \exists ! y \psi(x, y)$ と言っていて，$F(x)$ はすべての x に対して定義されています．x が順序数でないときには $F(x)$ を 0 かなにかの既定の値にしておけばよいので，このことは問題になりません．

この F は集合ではないのですが，$F{\restriction}\delta = \{(\eta, F(\eta)) : \eta \in \delta\}$ は置換公理によってそれぞれ集合となります（補題 I.7.9 参照）．ですから応用上 δ 上で定義された F のことだけを考えたい場合には，わたくしたちの定理は順

序対の集合としての合法的な函数 $F{\restriction}\delta$ を与えてくれます.

フォーマルには，この定理はしかるべき φ に対して別の論理式 ψ を書いて(1)と(2)を証明できる，と主張するメタ理論における図式です.

【証明】 順序数 δ に対して，h が（順序対の集合としての）函数で $\mathrm{dom}(h) = \delta$ であり，すべての $\xi < \delta$ に対して $h(\xi) = G(h{\restriction}\xi)$ となる，と主張する論理式を $\mathrm{App}(\delta, h)$ としよう（h はこれから定義する函数の **δ-近似**（approximation）と呼ばれる）．定理が証明されてしまえば，$\mathrm{App}(\delta, h)$ が $h = F{\restriction}\delta$ と同値であることが明らかとなる．この $\mathrm{App}(\delta, h)$ を用い，ψ を

$$\begin{aligned}\psi(x, y) \iff & [x \notin ON \wedge y = 0] \\ & \vee [x \in ON \wedge \exists\delta > x \exists h [\mathrm{App}(\delta, h) \wedge h(x) = y]]\end{aligned}$$

と定めて，定理を証明することにしよう．この定義でうまくいくことをチェックせねばならないが，これはそれぞれの δ-近似の存在と一意性を検証できさえすれば簡単である．一意性とは，すべての δ-近似はそれらが定義されているところではいつでも一致するということ

$$\delta \le \delta' \wedge \mathrm{App}(\delta, h) \wedge \mathrm{App}(\delta', h') \to h = h'{\restriction}\delta \tag{U}$$

を意味する．ここでとくに $\delta = \delta'$ とすれば，各 δ ごとに δ-近似はあるとしてもせいぜい一つだということになる．次に存在というのは

$$\forall\delta\exists! h \mathrm{App}(\delta, h) \tag{E}$$

のことである．この (U) と (E) があれば定理はたやすく導かれる．まずこれらが $\forall x \exists! y \psi(x, y)$ を導くので(1)にあるように ψ は函数 F を定める．(2)を確かめるために ξ を固定し $\delta > \xi$ をとる．(E) を適用して $\mathrm{App}(\delta, h)$ をみたすただ一つの函数 h をとる．ψ と F の定義から $F{\restriction}\delta = h$ がわかり，したがって $F{\restriction}\xi = h{\restriction}\xi$ がわかり，App の定義を適用すれば $F(\xi) = h(\xi) = G(h{\restriction}\xi) = G(F{\restriction}\xi)$ となって(2)を得る.

その (U) を証明するには，すべての $\xi < \delta$ について $h(\xi) = h'(\xi)$ を超限帰納法で示す．そうでなかったとして ξ を $\{\xi < \delta : h(\xi) \ne h'(\xi)\}$ の最小要素としよう．すると $h{\restriction}\xi = h'{\restriction}\xi$ であるから $\mathrm{App}(\delta, h)$ と $\mathrm{App}(\delta', h')$ を適用して $h(\xi) = G(h{\restriction}\xi) = G(h'{\restriction}\xi) = h'(\xi)$ となり矛盾する.

また (E) の証明には ON 上の超限帰納法（定理 I.9.1）を適用する．一意

性は (U) から得られるので，$\forall\delta\exists h \mathrm{App}(\delta, h)$ を証明できれば十分である．こうなっていなかったとして，$\neg\exists h \mathrm{App}(\delta, h)$ となる最小の $\delta \in ON$ を考える．δ が最小なので，$\beta < \delta$ のときはそれぞれ $\mathrm{App}(\beta, g_\beta)$ をみたす g_β が（(U) によってただ一つ）とれる．3 とおりの場合が考えられる：

第 1 の場合　δ が後続型順序数である．$\delta = \beta + 1$ としよう．$f = g_\beta \cup \{\langle \beta, G(g_\beta)\rangle\}$ とおく．すると f は函数で $\mathrm{dom}(f) = \beta \cup \{\beta\} = \delta$，$f{\restriction}\beta = g_\beta$ となる．ここですべての $\xi < \delta$ に対して $f(\xi) = G(f{\restriction}\xi)$ となることを見よう．$\xi < \beta$ のときは $\mathrm{App}(\beta, g_\beta)$ により，また $\xi = \beta$ のときは $f(\beta)$ の定義によればよい．ところが，そうすると $\mathrm{App}(\delta, f)$ ということになり $\neg\exists h \mathrm{App}(\delta, h)$ に矛盾する．

第 2 の場合　$\delta = 0$. これは $\mathrm{App}(0, \emptyset)$ が成立しているので起こりえない．

第 3 の場合　δ が極限順序数である．$f = \bigcup\{ g_\beta : \beta < \delta\}$ とおく．すると（(U) によって）f は函数で，$\mathrm{dom}(f) = \delta$ である．さらに $\mathrm{App}(\delta, f)$ となることが，先ほど (U)+(E) から定理を導いたのと同じ論法で示される．ところがこれはふたたび $\neg\exists h \mathrm{App}(\delta, h)$ と矛盾する．　□

定義 I.9.3　$\alpha \in ON$ に対して α-列とは α を定義域とする函数 s のことであり，各 $\xi < \alpha$ に対して $s_\xi = s(\xi)$ とする．

たとえば微積分で学ぶ実数の「無限列」は本当は函数 $s\colon \omega \to \mathbb{R}$ であり，$s(n)$ のことを s_n と書いているのです．

注意書き I.9.4　数学において普通に見られる ω-列の再帰的定義のフォーマルな正当性の保証は定理 I.9.2 でなされた．

たとえば，「実数の数列を $s_0 = 0.7$ と $s_{n+1} = \cos(s_n)$ によって定めよう」と言うことができます．フォーマルには函数 $s\colon \omega \to \mathbb{R}$ を再帰によって定義しており，その正当性は先ほどのフィボナッチ数列の場合と同じ論法で保証されます．そして s_n というのは $s(n)$ のもう一つの書き方にすぎません．数列 s_n が $\cos(t) = t$ をみたすある値 $t \sim 0.739$ に収束する，というのは，この函数 s に関する命題なのです．

再帰のもう一つの例として，$\bigcup$ をとる操作の反復を考えることもできます．与えられた集合 x に対して

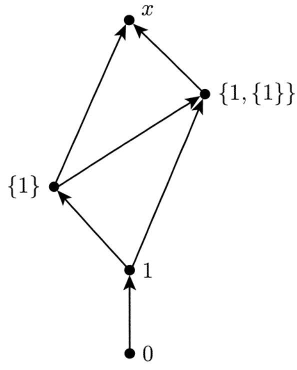
$$x = \bigcup{}^0 x, \quad \bigcup x = \bigcup{}^1 x, \quad \bigcup\bigcup x = \bigcup{}^2 x, \quad \cdots$$

という列が得られます．ここで x は（あたり前のことですが）x の要素全体の集合，$\bigcup x$ は x の要素の要素全体の集合，$\bigcup^2 x$ は x の要素の要素の要素全体の集合，以下同様，となります．

定義 I.9.5 $\bigcup^0 x = x$，$\bigcup^1 x = \bigcup x$ とし，再帰的に $\bigcup^{n+1} x = \bigcup\bigcup^n x$ と定める．このとき $\mathrm{trcl}(x) = \bigcup\{\bigcup^n x : n \in \omega\}$ は x の**推移閉包**と呼ばれる．

よりフォーマルにこの再帰の正当性を確かめるには，各集合 x ごとに ω 上の函数 f_x を $f_x(0) = x$，$f_x(n+1) = \bigcup f_x(n)$ によって定義します．ですから $\bigcup^n x$ とは $f_x(n)$ のもう一つの書き方にすぎないわけです．

関係 $\in$ を有向グラフに見たてれば，$z \in \bigcup^n x$ となるのは z から x へ至る長さちょうど $n+1$ の経路が存在することと同値です．ですから $z \in \mathrm{trcl}(x)$ は z から x への有限な $\in$-経路が存在することと同値になり，関係 $z \in \mathrm{trcl}(x)$ は有向グラフの推移閉包という一般的概念の一つの特殊ケースとなります．次の例に見えるように，z から x へは異なった長さの複数の経路がありえます．



図のように $x = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}$ とすると $\mathrm{trcl}(x) = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}, 1, 0\}$ となる．$\{1\}$ から x へは長さ 1 の経路と長さ 2 の経路があって $\{1\} \in \bigcup^0 x \cap \bigcup^1 x = x \cap \bigcup x$ となる．同様に $1 \in \bigcup^1 x \cap \bigcup^2 x$，$0 \in \bigcup^2 x \cap \bigcup^3 x$ である．

インフォーマルに言えば，$\mathrm{trcl}(x)$ には x を作り上げるのに用いられたすべての集合が含まれます．インフォーマルに言えば基礎の公理はどんな集合も 0 すなわち空集合から作り上げることができると主張するものです．これについてはセクション I.14 を見てください．基礎の公理がなければ，自分たち自身から作り上げられた集合も存在しえます．たとえば $b = \{c\}$ かつ $c = \{b\}$ で $b \neq c$ だったとしましょう．すると，$\mathrm{trcl}(b) = \{b, c\}$ であり，これは

推移的集合です．$b \in \{b\} = \bigcup b = \bigcup^3 b = \bigcup^5 b = \cdots$ となって，b から b への長さ 2, 4, 6, $\cdots$ の経路が存在することになります．

演習問題 I.9.6　任意の集合 x について

（1） $x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$.

（2） $\mathrm{trcl}(x)$ は（定義 I.8.1 にいう）推移的集合である．

（3） $x \subseteq t$ かつ t が推移的集合であれば $\mathrm{trcl}(x) \subseteq t$ である．したがって $\mathrm{trcl}(x)$ は x を含む最小の推移的集合である．

（4） $y \in x$ のとき $\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ となる．

（5） $z \in \mathrm{trcl}(x)$ は z から x への $\in$-経路の存在と同値である．

フォーマルに言えば z から x への $\in$-経路とはある自然数 $n \geq 2$ の上の函数 s で，$s(0) = z$，$s(n-1) = x$，かつすべての $i < n-1$ について $s(i) \in s(i+1)$ をみたすもののことです．

I.10　冪集合

冪集合の公理は，すべての集合 x に対してある集合 y がとれて $\forall z(z \subseteq x \to z \in y)$ となる，というものです．そこで内包公理により $\{z : z \subseteq x\}$ が存在し，次の定義が正当であるとわかります．

定義 I.10.1　x の**冪集合** $\mathcal{P}(x)$ とは $\{z : z \subseteq x\}$ のことである．

これで函数空間を定義できるようになりました．もしも $f\colon A \to B$ であれば $f \in \mathcal{P}(A \times B)$ となるので，次の定義が正当とわかります．

定義 I.10.2　B^A あるいは ${}^A B$ とは，$\mathrm{dom}(f) = A$ と $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$ をみたす函数 f 全体からなる集合とする．

通常は B^A と書きます．こちらが数学の大部分において標準になっている記法なのですが，A と B が順序数である場合には必要に応じて ${}^A B$ と書きます．たとえば 2^3 は 8 という数のことであり，8 つの函数からなる集合 ${}^3 2$ は，これとは別のものです．いっぽう，$\mathbb{R}^3$ はいつでも $3 = \{0, 1, 2\}$ から $\mathbb{R}$ への函数全体の集合をあらわします．ですから $x \in \mathbb{R}^3$ であれば，x は定義 I.9.3 で述べたような 3 つの実数 x_0, x_1, x_2 の列です．

定義 I.10.3　$A^{<\alpha} = {}^{<\alpha}A = \bigcup_{\xi<\alpha} A^{\xi}$.

とくに A をアルファベット（文字の集合）とみなせば，$A^{<\omega}$ は A の要素から作られるすべての「語」（つまり長さ有限の文字列）の集合ということになります．わたくしたちは $\mathbb{R}^4$ の点をあらわすのに $\sigma = (x, y, z, t)$ と書いたりしますが，この σ はフォーマルには 4 から $\mathbb{R}$ への函数なのでした．この記法はつぎの定義で精密に述べられます．

定義 I.10.4　$a_0, \cdots, a_{m-1} \in A$ のとき $(a_0, \cdots, a_{m-1})$ とは $\sigma(i) = a_i$ で定まる A^m の要素 σ のことだとする．$\sigma \in A^m$，$\tau \in A^n$ のとき，$\sigma^\frown\tau$ または $\sigma\tau$ とは σ と τ の**連結**と呼ばれ，$i < m$ のとき $\pi(i) = \sigma(i)$，$j < n$ のとき $\pi(m + j) = \tau(j)$ として定まる A^{m+n} の要素 π のことだとする．

文字列の連結は（セクション I.15 や II.4 などの）フォーマルな言語の理論でよく用いられます．ここで (x, y) に関して，それが 2 を定義域とする函数なのか，対 $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ のことなのかという曖昧さが残ります．しかし，どちらの対を用いようと，演習問題 I.6.15 のように対からもとの x と y が一意的に定まるわけですから，問題は起きないでしょう．

演習問題 I.10.5　$A \times B$ と A/R（それぞれ定義 I.7.8 と I.7.15 を参照）の正当性を，冪集合公理を用い，置換公理を用いないで（つまりセクション I.2 で述べた Z^- において）示しなさい．
[ヒント]　$A/R \subseteq \mathcal{P}(A)$ であり，$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ であることに注意しなさい．　□

この演習問題は歴史的にみて興味ぶかいもので，というのも，ツェルメロの公理系が 1908 年に導入されたあと，フレンケルの置換公理は 1922 年まで導入されなかったのですが，その間にも，人々は通常の数学的構成法のすべてをツェルメロの集合論において定式化できたということだからです．この演習問題での $A \times B$ の正当性の保証は対 $\langle a, b\rangle$ を $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ とした特定の定義に依存している点で，定義 I.7.8 で与えたものと異なっています．

I.11　基数

定義 I.11.1

（１） $X \preccurlyeq Y$ とは函数 $f\colon X \xrightarrow{1-1} Y$ が存在すること．

（２） $X \approx Y$ とは函数 $f\colon X \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} Y$ が存在すること．

ですから，$X \approx Y$ というのは X と Y の間に，ある函数によって 1 対 1 対応を与えられるという意味において，両者が**同じサイズ**（同じ**濃度**）をもつということですし，$X \preccurlyeq Y$ というのは，X を Y の中へ 1 対 1 に埋込む函数があるので X のサイズが Y と同じかまたは小さいということを意味します．

補題 I.11.2

（１） $\preccurlyeq$ は反射的で推移的である．

（２） $X \subseteq Y$ のとき $X \preccurlyeq Y$ である．

（３） $\approx$ は同値関係である．

【証明】 (2) と，(1) と (3) における反射性の証明には恒等函数を用いる．(1) と (3) における推移性を証明するには函数を合成する． □

濃度をめぐるこれらの概念はカントールによって初めて詳しく検討されたのですが，無限集合がその真部分集合と同じサイズをもちうるという事実については，ガリレオがすでに 1638 年に写像 $n \mapsto n^2$ を用いて $\omega \approx \{n^2 : n \in \omega\}$ となることを指摘しています．（「数があるのと同じ多さで平方数もある，と言わざるを得ません」[28]）

演習問題 I.11.3 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (0,1) \times (0,1) \preccurlyeq (0,1) \approx \mathbb{R}$ を証明しなさい．

［ヒント］ 実数についてのフォーマルな理論展開（セクション I.15 参照）はまだ始まっていないので，ここでは実数についてすでに知っている知識を使ってもらうことになる．タンジェント（正接）函数によって開区間から $\mathbb{R}$ の上への写像が与えられる．$(0,1) \times (0,1) \preccurlyeq (0,1)$ を示すために，各実数 $x \in (0,1)$ を十進無限小数であらわす．このとき，途中から 9 ばかりが続く展開は採用しないことにしよう．そして，与えられた x と y に，それらの十進展開を混ぜあわせて得られる実数 z を対応させなさい． □

全単射よりも単射を出してみせるほうが簡単だ，というのはよくあることです．たとえば演習問題 I.11.3 より $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\preccurlyeq\mathbb{R}$ ですし，$\mathbb{R}\preccurlyeq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ のほうは言うまでもありません．次の補題の証明から，$\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の上にうつす全単射の作り方はわかるのですが，これはそれほど簡単というわけにはいきません．

補題 I.11.4 $B\subseteq A$ かつ $f\colon A\xrightarrow{1-1}B$ のとき $A\approx B$ である．

【証明】 このとき $A\supseteq B\supseteq f(A)$ かつ $f\colon A\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}f(A)$ なのだが，ここでは A から B の上への全単射を作らないといけない．いま，$f\colon A\to A$ なので，n に関する再帰により，f を n 回反復した $f^n\colon A\to A$ が定まる（63 ページを見なさい）．とくに f^0 は恒等函数であり，f^1 は f である．すると，

$$
\begin{aligned}
f^0(A)=A\supseteq f^0(B)=B\supseteq f^1(A)\supseteq f^1(B)&\\
\supseteq f^2(A)\supseteq f^2(B)\supseteq f^3(A)\supseteq\cdots&
\end{aligned}
$$

となっている．$H_n=f^n(A)\setminus f^n(B)$，$K_n=f^n(B)\setminus f^{n+1}(A)$ としよう．すると各 n ごとに f は H_n を H_{n+1} の上へ 1 対 1 に写すし，また K_n を K_{n+1} の上へ 1 対 1 に写す．$P=\bigcap_{n<\omega}f^n(A)=\bigcap_{n<\omega}f^n(B)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
A&=P\quad\cup\quad H_0\cup H_1\cup H_2\cup\cdots\quad\cup\quad K_0\cup K_1\cup K_2\cup\cdots,\\
B&=P\quad\cup\quad H_1\cup H_2\cup H_3\cup\cdots\quad\cup\quad K_0\cup K_1\cup K_2\cup\cdots
\end{aligned}
$$

であり，P と H_m たちと K_n たちはどの二つも互いに交わらない．そこで $x\in\bigcup_n H_n$ のとき $g(x)=f(x)$，$x\in P\cup\bigcup_n K_n$ のとき $g(x)=x$ とおけば，g は A から B の上への全単射である．□

とくに $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\approx\mathbb{R}$ を示そうというのであれば，$A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ そして $B=\mathbb{R}$ とおいて，演習問題 I.11.3 で得られた単射 $f\colon A\xrightarrow{1-1}B$ を考えます．ここで $\mathbb{R}$ は文字どおりには $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の部分集合ではありませんが，そのようなふりをすることは可能です．すなわち，幾何学でよくやっているとおり，直線を平面の部分集合と考えるわけです．一般に，補題 I.11.4 における $B\subseteq A$ という仮定は B から A への単射が存在するという仮定に弱めることができ，そのことから次の結果が得られます．

定理 I.11.5（シュレーダー-ベルンシュタイン定理） $A\approx B$ は $A\preccurlyeq B$ かつ

$B \preccurlyeq A$ と同値である．

【証明】 函数 $f\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ があれば，f によって $A \preccurlyeq B$ であり f^{-1} によって $B \preccurlyeq A$ である．もう一方の自明でない向きを示すためには，$f\colon A \xrightarrow{1-1} B$ と $h\colon B \xrightarrow{1-1} A$ があったとして $A \approx B$ を示さねばならない．いま $\widehat{B} = h(B) \subseteq A$ とすると $h\colon B \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \widehat{B}$ なので $\widehat{B} \approx B$ である．また $h \circ f\colon A \xrightarrow{1-1} \widehat{B}$ であるから，補題 I.11.4 から $A \approx \widehat{B}$ が従う．□

カントールは定理 I.11.5 を予想していたものの，証明しませんでした．カントールはまた，どの二つの集合も（$X \preccurlyeq Y$ または $Y \preccurlyeq X$ となるという意味で）比較できると予想しました．これはそのとおりなのですが，証明には選択公理が必要となります（定理 I.12.1 を見なさい）．定理 I.11.5 は 1890 年代に証明を見いだしたシュレーダーとベルンシュタインにちなんで名づけられましたけれども，デデキントはそれに先立つ 1887 年に，定理の血肉と言うべき補題 I.11.4 を証明していました（文献 [21] 第 3 巻 447 ページ）．補題 I.11.4 に関連してもう一言．次の例は，補題の証明には何かしら無限個のものの組みかえが必要になることを示しています．

演習問題 I.11.6 $A = [0, 1]$，$B = [0, 1/2)$，$f(x) = x/3$ として，$g\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ を補題 I.11.4 の証明で指示されたとおりに作ったとする．この g のグラフを図示しなさい．さらに，A から B の上へのどんな全単射も不連続点を無限に多くもつことを示しなさい．

サイズが本当に小さい，という概念が $\preccurlyeq$ とは別にあります．

定義 I.11.7 $X \prec Y$ とは $X \preccurlyeq Y$ かつ $Y \not\preccurlyeq X$ ということ．

シュレーダー-ベルンシュタイン定理を考えると，X を Y の中へ 1 対 1 に写像できるけれども，X から Y の上への全単射は存在しないと言っても，$X \prec Y$ と同じことになります．

名高いカントールの定理は $A \prec \mathcal{P}(A)$ であると主張します．A を $\mathcal{P}(A)$ の上へ写像できないことを示す証明において，鍵となるアイディアを取り出してみましょう．

補題 I.11.8（カントールの対角線論法）　f が函数で $A = \mathrm{dom}(f)$ のとき，$\mathbb{D} = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ とおけば $\mathbb{D} \notin \mathrm{ran}(f)$ である．

【証明】　もしもある $c \in A$ について $\mathbb{D} = f(c)$ が成立しているなら，$\mathbb{D}$ の定義を $x = c$ にあてはめて，$c \in \mathbb{D} \leftrightarrow c \notin f(c)$，したがって $c \in \mathbb{D} \leftrightarrow c \notin \mathbb{D}$ となって矛盾する．　□

定理 I.11.9（カントールの定理）　$A \prec \mathcal{P}(A)$.

【証明】　函数 $x \mapsto \{x\}$ が A から $\mathcal{P}(A)$ の中への単射になっているので $A \preccurlyeq \mathcal{P}(A)$ である．もしも $\mathcal{P}(A) \preccurlyeq A$ だったら A から $\mathcal{P}(A)$ の上へ全単射が存在することになって補題 I.11.8 に反するので $\mathcal{P}(A) \not\preccurlyeq A$ である．　□

この定理を $A = V = \{x : x = x\}$ に適用すると次のパラドックスになります.

パラドックス I.11.10（カントールのパラドックス）　$V \prec \mathcal{P}(V)$ だが $\mathcal{P}(V) = V$ なので $V \prec V$ となって矛盾.

この「矛盾」から言えることは，すべての集合を含有する万有集合は存在しないということで，すでに（定理 I.6.6 によって）知っているとおりですし，ラッセルのパラドックスを用いた証明のほうが，よほど簡単でした．そのラッセルのパラドックスも対角線論法の一つの特殊ケースであることに注意しましょう．$A = V = \mathcal{P}(V)$ とし f を恒等函数として補題 I.11.8 を適用してみれば，$c = \mathbb{D}$ となるので，$\mathbb{D} = \{x : x \notin x\}$ が得られ，$\mathbb{D} \in \mathbb{D} \leftrightarrow \mathbb{D} \notin \mathbb{D}$ となって矛盾が生じます.

こうして冪集合演算によって次から次に大きな濃度が生み出されることになります．この演算は集合の指数演算の特別な場合になっています.

補題 I.11.11　${}^{A}2 \approx \mathcal{P}(A)$.

【証明】　$2 = \{0, 1\}$ なので，A の部分集合にその特徴函数を対応づければよい．〔訳注：集合 A の部分集合 B の特徴函数とは，$a \in B$ のとき $\chi(a) = 1$，$a \notin B$ のとき $\chi(a) = 0$ となるような A 上の函数 χ: $A \to \{0,1\}$ のことです.〕　□

次のこともたやすく証明できるでしょう.

演習問題 I.11.12　$A \preccurlyeq B$ かつ $C \preccurlyeq D$ のとき，${}^{A}C \preccurlyeq {}^{B}D$ である（ただし C は空集合でないものとする）．$2 \preccurlyeq C$ であれば $A \prec \mathcal{P}(A) \preccurlyeq {}^{A}C$ である．

基数の指数演算についてはセクション I.13 で詳しく調べることにします．そこでは選択公理（AC）を用いることになりますが，選択公理がなくても，$(x^y)^z = x^{y \cdot z}$ および $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$ という，自然数の指数演算で親しんだ法則の類似物が成立することをたやすく確かめられます．

補題 I.11.13

（１）${}^{C}({}^{B}A) \approx {}^{C \times B}A$.

（２）B と C が互いに交わらないとき，${}^{(B \cup C)}A \approx {}^{B}A \times {}^{C}A$.

【証明】　(1) のためには $\Phi\colon {}^{C}({}^{B}A) \to {}^{C \times B}A$ を $\Phi(f)(c, b) = (f(c))(b)$ によって定め，(2) のためには $\Psi\colon {}^{(B \cup C)}A \to {}^{B}A \times {}^{C}A$ を $\Psi(f) = (f{\restriction}B, f{\restriction}C)$ によって定める．もちろん，これらの定義が意味をなすことと，これらが実際に全単射であることを確かめねばならない．　□

ここであげた Φ と Ψ は，A がなんらかの構造をもっていて指数演算が定義できるようないくつもの状況において「自然な」ものです．たとえば，A が群であれば，通常の直積群の意味で Φ と Ψ はいずれも同型写像になっています．また A が位相空間であれば，通常の（チコノフの）直積位相の意味で Φ も Ψ も同相写像になっています．

定義 I.11.14　A が**可算である**とは $A \preccurlyeq \omega$ ということ，A が**有限である**とは，ある $n \in \omega$ について $A \preccurlyeq n$ となることである．**無限である**とは「有限でない」ということ，**不可算である**とは「可算でない」ということである．A が**可算無限である**とは可算であって無限であることである．

定理 I.11.9 によって $\mathcal{P}(\omega)$ は不可算です．セクション I.15 で $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ が定義されれば，$\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R} \approx \mathbb{C}$ がたやすく証明できます．$\mathbb{R}$ がしばしば実数の**連続体**と呼ばれるので，$\mathcal{P}(\omega)$ や $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ は「**連続体のサイズ**をもつ」と言われるのです．**連続体仮説**（CH）は，ω のサイズ（$\aleph_0$）と連続体のサイズ（$2^{\aleph_0}$）の中間のサイズの集合は存在しないと主張するものです（定義 I.13.8 参照）．

次の演習問題は I.8.22 の続きです.

演習問題 I.11.15

（1） $B \subseteq \alpha$ のとき $\mathrm{type}(B; \in) \leq \alpha$ である.

（2） $B \preccurlyeq \alpha$ のとき，ある $\delta \leq \alpha$ について $B \approx \delta$ である.

（3） $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ かつ $\alpha \approx \gamma$ のとき，$\alpha \approx \beta \approx \gamma$ である.

この(3)は補題 I.11.4 から（$A = \gamma$ とし $B = \beta$ とすれば）明らかです.(3)によって，順序数の全体は同じサイズ（あるいは濃度）のもののブロックに分かれていることになります. 各ブロックの最初の数のことを**基数**と呼びます. 英語では “two, three, four” は基数と呼ばれて量をあらわす数であり，“second, third, fourth” は序数と呼ばれて順序づけや系列に関する概念とともに用いられます. 集合論では基数も序数も同じ 2, 3, 4 になりますが，無限の場合には順序数と基数が区別されることになります.

定義 I.11.16　（フォン・ノイマン流の）**基数**とは，順序数 α のうちすべての $\xi < \alpha$ について $\xi \prec \alpha$ となるもののことである.

$\xi < \alpha \to \xi \subseteq \alpha \to \xi \preccurlyeq \alpha$ なので，順序数 α が基数でないことは，ある $\xi < \alpha$ について $\xi \approx \alpha$ となるとと同値です.

定理 I.11.17

（1） ω 以上の基数はどれも極限順序数である.

（2） 自然数はどれも基数である.

（3） A が基数の集合であれば $\sup(A)$ も基数である.

（4） ω は基数である.

【証明】　(1)について. $\alpha \geq \omega$ であって $\alpha = \delta + 1$ であったとする（したがって $\alpha > \delta \geq \omega$ となっている）. このとき $\alpha = \delta \cup \{\delta\}$ から δ の上への全単射 f を $f(\delta) = 0$, $n \in \omega$ のとき $f(n) = n + 1$, $\omega \leq \xi < \delta$ のとき $f(\xi) = \xi$ と定められるので，α は基数でありえない.

(2)について. 通常帰納法（定理 I.8.14）を用いる. 定義 I.11.16 は $\alpha = 0$ のとき無内容に成立するので 0 は基数である. 次に n が基数であったと仮定して $S(n)$ も基数であることを証明する. そうでないとして，$\xi < S(n)$

かつ $\xi \approx S(n)$ となる ξ をとろう．$f\colon \xi \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} S(n) = n \cup \{n\}$ とする．$\xi = \emptyset$ ということはありえないので，$\xi = S(m)$ としよう．このとき $m < n$ である．すると，$f\colon m \cup \{m\} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} n \cup \{n\}$ である．もしも $f(m) = n$ だったら $f{\restriction}m\colon m \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} n$ であって n が基数だという仮定に矛盾する．もしも $f(m) = j < n$ だったら，$f(i) = n$ となる $i < m$ をとり，$g(i) = j$ とし $x \neq i$ のとき $g(x) = f(x)$ として $g\colon m \to n$ を定めれば，これが m から n の上への全単射となり，これも矛盾する．

(3) について．$\sup A$ すなわち $\bigcup A$ が基数でなかったとして $\xi < \sup A$ かつ $\xi \approx \sup A$ となる ξ をとろう．$\alpha \in A$ を $\xi < \alpha$ となるようにとると，演習問題 I.11.15 により，$\xi \approx \alpha$ となるが，これは A の要素がすべて基数であるという仮定に矛盾する．

(4) は $A = \omega$ とすれば (2) と (3) からすぐわかる．□

さてここで A の濃度 $|A|$ を $A \approx \kappa$ となる基数 κ のことと定めたいところですが，そのような κ が**存在する**ことを証明するには A が整列順序づけできねばならず，そしてそのためには選択公理（AC）を用いねばなりません（セクション I.12 参照）．

定義 I.11.18　集合 A が**整列可能である**とは，A を整列順序づけする関係 R が存在することをいう．

演習問題 I.11.19　A が順序型 α に整列順序づけできることと，全単射 $f\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \alpha$ が存在することとは同値である．したがって，A が整列可能であることと，ある順序数 α について $A \approx \alpha$ となることとは同値である．

定義 I.11.20　A が整列可能のとき，$A \approx \alpha$ となる最小の順序数 α を $|A|$ とする．

順序数からなる集合は明らかにどれも整列可能です．とくにすべての順序数 α に対して $|\alpha|$ が定義されます．$|\omega + \omega| = \omega$ であることは直接にたやすく検証できます．一般に，順序数の算術によって濃度が増すことはありません（演習問題 I.11.34 参照）．

演習問題 I.11.21　A が整列可能で $f\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$ のとき，B も整列可能で $|B| \leq |A|$ である．

演習問題 I.11.22　κ が基数であって B が空でないとき，$B \preccurlyeq \kappa$ であることと全射 $f\colon \kappa \xrightarrow{\text{onto}} B$ が存在することとは同値である．

とくに $\kappa = \omega$ とすると，空でない B が可算であることと（これは定義 I.11.14 により $B \preccurlyeq \omega$ ということですが），全射 $f\colon \omega \xrightarrow{\text{onto}} B$ が存在すること，すなわち自然数を用いて B の要素を数えつくせることとが同値となります．

演習問題 I.11.23　A と B がいずれも整列可能であるとき，

- ✌ $|A|$ は基数である．
- ✌ $A \preccurlyeq B$ と $|A| \leq |B|$ は同値．
- ✌ $A \approx B$ と $|A| = |B|$ は同値．
- ✌ $A \prec B$ と $|A| < |B|$ は同値．

演習問題 I.11.24　A が有限であることと，A が整列可能で $|A| < \omega$ であることとは同値．

演習問題 I.11.25　A も B も有限で $m = |A|$，$n = |B|$ だったとする．このとき $A \cup B$ も有限で $|A \cup B| \leq m + n$ であり（等号は $A \cap B = \emptyset$ と同値），$A \times B$ も有限で $|A \times B| = m \cdot n$ である．

今のところ，まだ不可算基数を作っていません．$\mathcal{P}(\omega)$ のような不可算集合はすでにできています．AC はすべての集合が整列可能だという言明と同値（セクション I.12 参照）ですから，AC のもとでは $|\mathcal{P}(\omega)|$ は不可算基数ということになります．コーエンの [15][16]（あるいは [36] を参照）によると，ZF では $\mathcal{P}(\omega)$ が整列可能であることを証明できません．それでも，次に述べる方法で，AC によらずに不可算基数を生み出せます．

定理 I.11.26（ハルトークス，**1915** 年）任意の集合 A に対して，ある基数 κ を $\kappa \not\preccurlyeq A$ となるようにとれる．

【証明】　対 $(X, R) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times A)$ のうち，$R \subseteq X \times X$ であって R が X を整列順序づけするようなもの全体の集合を W とする．つまり W は

A の部分集合上の整列順序全体のなす集合である．$\alpha \preccurlyeq A$ はある $(X,R) \in W$ について $\alpha = \mathrm{type}(X;\,R)$ となることと同値である（演習問題 I.11.19 参照）．置換公理を使って $\beta = \sup\{\,\mathrm{type}(X;\,R)+1 \;:\; (X,R) \in W\,\}$ とおくと，$\alpha \preccurlyeq A$ のときいつでも $\beta > \alpha$ となる．したがって $\beta \not\preccurlyeq A$ である．$\kappa = |\beta|$ としよう．すると $\kappa \approx \beta$ なので $\kappa \not\preccurlyeq A$ である．□

定義 I.11.27　$\kappa \not\preccurlyeq A$ となる最小の基数 κ のことを $\aleph(A)$ とする．順序数 α については $\aleph(\alpha)$ を α^+ と書く．

演習問題 I.11.28　順序数 α に対して，α^+ は α より大きな基数のうちで最小のものである．そして，$\alpha < \omega$ なら $\alpha^+ = \alpha + 1$ であり，$\alpha \geq \omega$ のときは $\alpha^+ > \alpha + 1$ である．

演習問題 I.11.29　定理 I.11.26 の証明にあらわれた β はそれ自体が基数である．つまり $\beta = \kappa = \aleph(A)$ である．

この $\aleph(A)$ は**ハルトークスのアレフ函数**というものです．これは選択公理（AC）のない集合論を考えるときによく用いられます．AC のもとでは $|A|$ がいつでも定義されて，$\aleph(A)$ と $|A|^+$ とは同じものになりますが，後者のほうが標準の書き方とされます．

超限再帰によって（アレフ系列，別名オメガ系列を）次のように定めます．

定義 I.11.30　$\aleph_\xi$ と ω_ξ は同じものである．これを ξ に関する再帰によって

☞ $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$,

☞ $\aleph_{\xi+1} = \omega_{\xi+1} = (\aleph_\xi)^+$,

☞ η が極限順序数のとき $\aleph_\eta = \omega_\eta = \sup\{\,\aleph_\xi \;:\; \xi < \eta\,\}$

と定義する．

濃度の話をするときには $\aleph_\xi$ と書き，順序型の話をするときには ω_ξ と書くことが多いのです．$\aleph_\xi$ の系列はすべての無限基数を昇順に並べたものになります．

演習問題 I.11.31　$\xi < \zeta \to \aleph_\xi < \aleph_\zeta$ である．κ が無限基数であることと，ある順序数 ξ について $\kappa = \aleph_\xi$ となることとは同値である．

基数について筋の通った理論を得るには AC が必要になるのですが，基本となるいくつかの事実は ZF だけから証明できます．たとえばわたくしたちは $\alpha \times \alpha$ を辞書式に整列順序づけできることを知っていて，その順序型を $\alpha \cdot \alpha$ と定義したわけですが，これは $\alpha \geq 2$ のときには必ず α より大きくなります．ところが α が無限順序数ならば，$\alpha \cdot \alpha$ の濃度は α の濃度といつでも同じになるのです．たとえば $\omega \times \omega$ も可算無限となります．

定理 I.11.32　$\alpha \geq \omega$ ならば $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$ である．したがってもしも κ が無限基数ならば $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ である．

【証明】　基数について主張を証明できれば，$\alpha \approx \kappa$ のとき $\alpha \times \alpha \approx \kappa \times \kappa \approx \kappa \approx \alpha$ となるので，それで十分である．まず $\kappa \preccurlyeq \kappa \times \kappa$ となることは，関数 $\xi \mapsto (\xi, \xi)$ を考えればわかるが，$|\kappa \times \kappa|$ が κ より大きくなりえないことを示す必要がある．

そのために $ON \times ON$ を整列順序づけする $ON \times ON$ 上の関係 $\lhd$ を定め，κ が無限基数のときにはいつでも $\lhd$ が $\kappa \times \kappa$ を順序型 κ に整列順序づけすることを証明しよう．そうすれば，$\kappa \times \kappa \approx \kappa$ が得られる．

関係 $(\xi_1, \xi_2) \lhd (\eta_1, \eta_2)$ が成立するのは，$\max(\xi_1, \xi_2) < \max(\eta_1, \eta_2)$ のときと，$\max(\xi_1, \xi_2) = \max(\eta_1, \eta_2)$ であって (ξ_1, ξ_2) が辞書式順序で (η_1, η_2) の前にくるときだと定める．この $\lhd$ が（定理 I.8.5 参照，$\in$ が ON を整列順序づけするというのと同じ意味において）$ON \times ON$ を整列順序づけすることを検証するのはたやすい．S を $ON \times ON$ の部分集合とするとき，$\mathrm{type}(S)$ とは $\mathrm{type}(S; \lhd)$ のことだとしよう．たとえば $\mathrm{type}((\omega + 1) \times (\omega + 1)) = \omega \cdot 3 + 1$ となっている．

示すべきことは，κ が無限基数ならば必ず $\mathrm{type}(\kappa \times \kappa) = \kappa$ となることだ．超限帰納法（定理 I.9.1）を用いることにしよう．すなわち，κ を $\delta := \mathrm{type}(\kappa \times \kappa)$ が κ と異なるような最小の無限基数として，矛盾を導き出す．

すべての順序数 $\alpha < \kappa$ について $|\alpha \times \alpha| < \kappa$ である．というのも，α が無限なら κ の最小性により $\mathrm{type}(|\alpha| \times |\alpha|) = |\alpha|$ であるから $|\alpha| \times |\alpha| \approx |\alpha|$ であり，$|\alpha| \approx \alpha$ より $\alpha \times \alpha \approx \alpha < \kappa$ となるから．また α が有限なら，演習問題 I.11.25 により $|\alpha \times \alpha| < \omega \leq \kappa$ である．

いま $(\delta; <)$ から $(\kappa \times \kappa; \lhd)$ への同型写像を $F \colon \delta \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \kappa \times \kappa$ としよう．

もしも $\delta > \kappa$ なら，$(\xi_1, \xi_2) = F(\kappa)$ とし，$\alpha = \max(\xi_1, \xi_2) + 1$ とおく．定理 I.11.17 より κ は極限順序数なので $\alpha < \kappa$ であり，$\lhd$ の定義によって $F``\kappa \subseteq \alpha \times \alpha$ となる．そこで $\kappa \preccurlyeq \alpha \times \alpha \prec \kappa$ となって矛盾する．

もしも $\delta < \kappa$ なら，$\kappa \preccurlyeq \kappa \times \kappa \approx \delta \prec \kappa$（最後の $\prec$ は κ が基数であることによる）となって，やはり矛盾する．したがって $\delta = \kappa$ である．□

演習問題 I.11.33　任意の順序数 δ を δ_0 とし，$\delta_{n+1} = \aleph_{\delta_n}$ とおく．さらに $\gamma = \sup\{\delta_n : n \in \omega\}$ とする．$\aleph_\gamma = \gamma$ を示しなさい．とくに $\delta_0 = 0$ としたとき，γ は $\xi = \aleph_\xi$ をみたす最小の順序数 ξ である．

演習問題 I.11.34　順序数の算術では濃度が増すことがない．言いかえると，α と β を $\min(\alpha, \beta) \geq 2$ かつ $\max(\alpha, \beta) \geq \omega$ であるような順序数とすれば，$|\alpha + \beta| = |\alpha \cdot \beta| = |\alpha^\beta| = \max(|\alpha|, |\beta|)$ である．このことを証明しなさい．

［ヒント］ $\alpha + \beta$ と $\alpha \cdot \beta$ については演算 $+$ と $\cdot$ の定義および定理 I.11.32 から簡単にわかる．指数演算の定義は表 I.1 の再帰的計算によるものとする．指数演算については，β に関する帰納法による素直な証明では選択公理を用いないといけないように見えるので，証明は少しばかりやっかいになる．ここでは表 I.1 の再帰的な計算を指数演算の定義とみなす．たとえば β に関する帰納法によって，α と β がともに可算であれば α^β も可算であることを証明したかったとしよう．β が極限順序数のときは，$\alpha^\beta = \sup_{\xi<\beta}(\alpha^\xi) = \bigcup_{\xi<\beta}(\alpha^\xi)$ であって，（帰納法の仮定を用いると）これは可算個の可算集合の和集合である．ところが，可算個の可算集合の和が可算集合になるという周知の事実は AC を用いて得られる．AC の使用を避けるために可算順序数 δ を**一つ固定**し，単射 $f \colon \delta \xrightarrow{1-1} \omega$ を**一つ固定**しよう．そうすれば，$\alpha, \beta < \delta$ のときの α^β から ω への単射を**定義する**ことができる．定義は f を利用し，β に関する再帰による．また $\omega \times \omega$ から ω への（ある固定された）単射をも利用する．

これと同様にして，再帰を用いて定義される順序数の算術に関する函数はいずれも濃度を増やさないことが ZF で証明される．たとえば，$h(\alpha, \delta, 3) = \alpha^{\alpha^{\alpha^\delta}}$ であるようなハイパー指数函数 h というものを，

$$h(\alpha, \delta, 0) = \delta, \quad h(\alpha, \delta, S(\beta)) = \alpha^{h(\alpha,\delta,\beta)},$$
$$\gamma \text{ が極限順序数のとき } h(\alpha, \delta, \gamma) = \sup_{\xi<\gamma} h(\alpha, \delta, \xi)$$

と定義できるだろう．もしも α と δ と β が可算であれば，$h(\alpha, \delta, \beta)$ も可算である．□

演習問題 I.11.35　セクション I.2 で述べた Z^- 集合論において，不可算な整列順序集合が存在することを証明しなさい．

[ヒント]　$A = \omega$ として定理 I.11.26 の証明のとおりに集合 W を作りなさい．$\cong$ を順序同型関係として，$B = W/{\cong}$ とおき，B をしかるべく整列順序づけしなさい．置換公理抜きで商集合を作る方法については，歴史に関する覚え書きともども，演習問題 I.10.5 を参照しなさい．ハルトークスは，1915 年には，定理 I.11.26 をわたくしたちが書いたとおりの形で表明することはできなかったはずだということに注意しよう．というのも，彼の結果は 1923 年のフォン・ノイマン流の順序数の定義にも，1922 年の置換公理の導入にも先駆けているからだ．□

演習問題 I.11.36　可算な狭義の全順序はいずれも $\mathbb{Q}$ の部分集合に同型である．

[ヒント]　$A = \{a_n : n \in \omega\}$ とし全順序集合 $(A; \lhd)$ が与えられたとして，n に関する再帰で $f(a_n)$ を定めることで，順序を保つ単射 $f\colon A \to \mathbb{Q}$ が得られる．□

この問題と次の問題は，セクション I.15 で $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ を定義するまでは，当然「非公式」なものにならざるを得ません．

演習問題 I.11.37　順序数 α について次のことは同値である．

（1）α は $\mathbb{Q}$ のある部分集合に同型である．

（2）α は $\mathbb{R}$ のある部分集合に同型である．

（3）α は可算である．

（4）α は $\mathbb{R}$ において閉集合であるような $\mathbb{Q}$ のある部分集合と同型である．

[ヒント]　(4) $\to$ (1) $\to$ (2) は言うまでもない．(3) $\to$ (4) は α に関する

帰納法による（$\alpha = \omega^2$ の場合についてサブセクション I.7.3 を参照しなさい）．$\mathbb{R}$ に不可算な整列部分集合があれば，互いに交わりのない開区間の不可算な集まりができることになるが，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ において稠密な可算集合であるから，これはありえない．したがって (2) → (3) が成立する．

(4) に関して，$\alpha \cong K \subseteq \mathbb{R}$ で K が閉集合であったとしよう．α が極限順序数なら K は $\mathbb{R}$ において有界でない．一方 α が後続型順序数であれば K は有界で，したがってコンパクトである．□

次の演習問題はこれより多少難しいでしょう．

演習問題 I.11.38　X がコンパクトなハウスドルフ空間で $0 < |X| \leq \aleph_0$ のとき，X はある後続型順序数に順序位相を入れたものと同相になる．

I.12　選択公理 AC

選択公理 AC と同値な命題は数多く知られています．それらについての詳しい議論はハワードとルビンの [34] を見てもらいましょう．ここでは，数学において特に有用と思われる AC の言いかえに話を限ることにします．要するに，次のとおりです．

定理 I.12.1（ZF）　次の各々は同値である．

（1）（セクション I.2 で述べた）選択公理．

（2）空でない集合からなる任意の集合族は選択函数をもつ．

（3）どんな集合も整列可能である．

（4）$\forall x, y(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)$.

（5）タッキーの補題．

（6）ハウスドルフ極大原理．

（7）ツォルンの補題．

このうち (2) (5) (6) (7) をこのセクションで定義して，定理を証明することにします．まず (2) から，

定義 I.12.2　F を，空でない集合からなる集合族とする．F に対する**選択函数**とは，$\mathrm{dom}(g) = F$ となる函数 g で，すべての $x \in F$ について $g(x) \in$

x となるもののことである．F に対する**選択集合**とは，すべての $x \in F$ について $C \cap x$ がちょうど一個の要素からなるような集合 C のことである．

セクション I.2 で述べた AC の形は，F が**互いに交わりのない**空でない集合からなる集合族だとすれば F に対する選択集合が存在する，というものでした．この C が選択集合と呼ばれるのは，各 $x \in F$ から一つずつ要素を**選んで**きているからです．図を描いてみればこの原理は「明らかに正しい」ように見えることでしょう．しかしながら，ツェルメロが見てとりコーエンが 1963 年に証明したとおり，F が無限個の集合からなる可能性があるために，このことは別個の原理として立てておく必要があるのです．わたくしたちがセクション I.2 でこの形の AC を採用したのは，主張を言いあらわすために必要な定義が少なくて済むからです．これはまたツェルメロが 1908 年に用いた形でもあります．

応用上はこの形の AC はあまり使いやすいとはいえません．実際には互いに交わりをもつ集合たちから要素を選びたい場合が多いからです．そうした場合には，選択**関数**を用いねばなりません．たとえば，$F = \{\{2\}, \{2,3\}, \{3\}\}$ であれば F に対する選択集合は存在しません．しかし，選択関数はたしかに存在します（$g(x) = \min(x)$ とすればよいのです）．

【定理 I.12.1 の (1) $\leftrightarrow$ (2) の証明】 (2) $\to$ (1)： 空でない**互いに交わりのない**集合たちからなる集合族 F が与えられたとする．g が F に対する選択関数だったなら，$C = \{ g(x) : x \in F \}$ は F に対する選択集合である．

(1) $\to$ (2)： 空でない集合たちからなる**任意の**集合族 F が与えられたとする．$F^* = \{ \{x\} \times x : x \in F \}$ とおこう．各 $x \in F$ に対し，その身代わりとして $\{x\} \times x$ すなわち $\{(x,i) : i \in x\}$ をつくるという仕掛けだ．$x \neq y$ のとき $\{x\} \times x$ と $\{y\} \times y$ は互いに交わらないので，(1) によってその選択集合 C が存在する．ところがこのとき C は順序対の集合であってさらに定義 I.7.5 にいう関数でもある．$\mathrm{dom}(C) = F$ でありまた C は F に対する選択関数になっている． □

集合族 $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ に対する選択関数 g があれば，A の整列順序づけに通じる道が開かれます．インフォーマルに言うと，セクション I.5 で述べたような超限列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

の形に A を並べ替えるのです．A の要素を一つ選んで a_0 とし，それと異なる要素を選んで a_1 とし，a_0 とも a_1 とも異なる要素を選んで a_2 とし，a_0, a_1, a_2 のどれとも異なる要素を選んで a_3 とし，以下同様に続けます．A が無限集合のときは，これには無限回の「選択」が必要ですが，それができることをフォーマルに保証してくれるのが選択函数というわけです．

【定理 I.12.1 の (2) $\leftrightarrow$ (3) $\leftrightarrow$ (4) の証明】　(3) $\to$ (2)：関係 R によって $\bigcup F$ が整列順序づけされているなら，各 x の R-最小要素を $g(x)$ とすることで選択函数 g を定義できる．

(2) $\to$ (3)：g を $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ に対する選択函数としよう．定義 I.11.27 にしたがって $\kappa = \aleph(A)$ とおく．何か $S \notin A$ である S を定めておく．この S を「止まれ」のサインと考えることにする．函数 $f\colon \kappa \to A \cup \{S\}$ を再帰によって，$A \setminus \{f(\xi) : \xi < \alpha\}$ が空でなければ $f(\alpha) = g(A \setminus \{f(\xi) : \xi < \alpha\})$，また空であれば $f(\alpha) = S$ と定義しよう．このとき $\xi < \alpha$ かつ $f(\alpha) \neq S$ ならば必ず $f(\xi) \neq f(\alpha)$ となることがわかる．$\kappa \not\preccurlyeq A$ であって単射 $f\colon \kappa \xrightarrow{1-1} A$ は存在しないから，ある α について $f(\alpha) = S$ となる．そこで $f(\alpha) = S$ となる最小の α を考えれば，$f{\restriction}\alpha\colon \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A$ となることがわかる．こうして A は順序型 α に整列順序づけされる（演習問題 I.11.19 参照）．

(4) $\to$ (3)：$\kappa = \aleph(A)$ とすれば $\kappa \not\preccurlyeq A$ なので (4) によって $A \preccurlyeq \kappa$ となり，A は整列順序づけできる（演習問題 I.11.15 参照）．

(3) $\to$ (4)：x と y が整列順序づけできるなら，フォン・ノイマン流の基数 $|x|$ と $|y|$ があり，$|x| \leq |y|$（このとき $x \preccurlyeq y$）あるいは $|y| \leq |x|$（このとき $y \preccurlyeq x$）の少なくとも一方は成立する．　□

ここでの (2) $\leftrightarrow$ (3) の証明によると，各集合 A ごとに，A が整列可能であることと $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ が選択函数をもつことが同値だとわかります．

これで定理 I.12.1 の (1), (2), (3), (4) が互いに同値だとわかりました．他の三つの集合論的原理はいずれも**極大原理**です．そのうちでは (7) のツォルンの補題がいちばんよく知られています．たとえばどんなベクトル空間も基底をもつことなどの証明においてしばしばツォルンの補題が持ちだされま

す．ところがこの例のように初歩的な応用にさいしては(5)のタッキーの補題のほうが極大原理としては使いやすいものなので，ここでもまず，集合族の中での極大集合の存在をめぐるタッキーの補題から説明します．

定義 I.12.3　$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ のとき $\mathcal{F}$ の要素 X が $\mathcal{F}$ **において極大である**とは，それが関係 $\subsetneq$ について極大であるという意味である（定義 I.7.18 参照）．つまり，X は $\mathcal{F}$ に属するどの集合の真部分集合にもならないということである．

たとえば $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$ であれば A が $\mathcal{F}$ において極大です．$\mathcal{F}$ が無限集合 A の有限部分集合全体のなす集合族であれば，$\mathcal{F}$ は極大要素をもちません．他の，もう少し意味のある例としては，

例 I.12.4　A をある体の上のベクトル空間とする．$\mathcal{P}(A)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ を，X が線形独立であるとき，かつそのときに限って $X \in \mathcal{F}$ として定めよう．このとき，X が $\mathcal{F}$ において極大であることと，X が基底であることとが同値となる．

このことの証明は線形代数のやさしい演習問題であって，選択公理を必要としません．復習しておくと，「線形独立」というのは，ベクトルの有限集合 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq X$ とゼロでないスカラー $a_1, \cdots, a_n$ を $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ となるようにとることはできない，ということです．X が線形独立だけれども基底ではないとすれば，X は A 全体を張らないので，X の張る部分空間に属さない $y \in A$ が存在することになります．このとき $X \cup \{y\}$ も線形独立であることが（線形代数の知識を使えば）わかります．したがって，X は極大でないわけです．

この例にあげた $\mathcal{F}$ が極大要素をもつといえるのは，この $\mathcal{F}$ が**有限特性の集合族**であることによるのです．

定義 I.12.5　$\mathcal{P}(A)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が**有限特性の**集合族であるとは，すべての $X \subseteq A$ について，$X \in \mathcal{F}$ であることと X のすべての有限部分集合が $\mathcal{F}$ に属することとが同値となるときにいう．

演習問題 I.12.6　$\mathcal{F}$ が有限特性の集合族のとき，$X \in \mathcal{F}$ かつ $Y \subseteq X$ であ

ればばY $Y \in \mathcal{F}$ である.

定義 I.12.7　次の主張を**タッキーの補題**という．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が有限特性の集合族で，$X \in \mathcal{F}$ のとき，極大な $Y \in \mathcal{F}$ で $X \subseteq Y$ をみたすものが存在する．

線形独立性が X の有限部分集合に関する性質であることから，例 I.12.4 の $\mathcal{F}$ は有限特性の集合族です．そこで，タッキーの補題からどんなベクトル空間も基底をもつことがわかるのです．実は，ブラースの [6] によれば，選択公理は「どんなベクトル空間も基底をもつ」という主張と同値なのです．他のいくつもの応用例でもそうですが，ここでは X が空集合であってもかまいません．任意の X に対してタッキーの補題を適用すれば，一次独立な X はある基底 Y の部分集合になることがわかります．

この種の証明は学部レベルの教科書によく見られるものです．順序数や超限再帰のことを知らなくても証明をたどれるのがその利点です．タッキーの補題かツォルンの補題を公理とみなしてしまえばよいのです．いっぽう，これらの極大原理が少々こみ入っていて，なんでそれが公理でなければならないのかを説明するのが困難であるというのが欠点です．選択をめぐる標準的な AC の (1) や (2) という形のほうが，直観的な動機づけははるかに明瞭です．順序数と再帰について知ってしまえば，タッキーの補題の証明は，もちろんいたってシンプルです．

【定理 I.12.1 の (3) → (5) → (1) の証明】　(3) → (5)：定義 I.12.7 のとおりに A と $\mathcal{F}$ と X が与えられたとする．A が整列順序づけできることから，$\kappa = |A|$ として $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ と並べることができる．各 $\beta \leq \kappa$ に対して，$X \cup \{x_\xi : \xi < \beta\}$ の部分集合 Y_β を次のように再帰的に定義しよう．

（a）　$Y_0 = X$ とする．

（b）　$Y_\alpha \cup \{x_\alpha\} \in \mathcal{F}$ なら $Y_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ を $Y_{\alpha+1}$ とし，そうでなければ Y_α を $Y_{\alpha+1}$ とする．

（c）　γ が極限順序数のときは $Y_\gamma = \bigcup\{Y_\alpha : \alpha < \gamma\}$ とする．

次に各 $\beta \leq \kappa$ に対して $Y_\beta \in \mathcal{F}$ であることを帰納的に確認しなさい．それには，後続型順序数の段階では (b) を用い，極限の β に対しては，$\mathcal{F}$ が有

限特性の集合族であることと(c)を用いる．$Y = Y_\kappa$ とおけば $Y \in \mathcal{F}$ である．この Y が極大であることを見るには，$Y \subsetneq Z \subseteq A$ となる Z を考えて $x_\alpha \in Z \setminus Y$ であるような α をとる．すると(b)によって $Y_\alpha \cup \{x_\alpha\} \notin \mathcal{F}$ である（そうでなければ $x_\alpha \in Y_{\alpha+1} \subseteq Y$ となる）．ところが $Z \supseteq Y_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ であるから演習問題 I.12.6 によって $Z \notin \mathcal{F}$ となる．

(5) → (1)： 互いに交わらない空でない集合からなる任意の集合族 F を考える．すべての $z \in F$ との共通部分が一元集合となるように集合 C を作らねばならない．$A = \bigcup F$ とおき，$\mathcal{G}$ を F に対する「部分的選択集合」全体の集合とする．すなわち，$X \in \mathcal{G}$ となるのは，$X \in \mathcal{P}(A)$ であって，どの $z \in F$ についても $X \cap z$ が一元集合または空集合となる場合である．ある $X \subseteq A$ が $\mathcal{G}$ に属さなかったとすると，X のある 2 元部分集合で $\mathcal{G}$ に属さないものがとれるはずなので，$\mathcal{G}$ は有限特性の集合族である．また $\emptyset \in \mathcal{G}$ でもある．そこで，タッキーの補題をもちいて極大な $C \in \mathcal{G}$ がとれる．もしも C が F に対する選択集合でなかったとすると，$C \cap z$ が一元集合でないような $z \in F$ がとれる．このとき（$C \in \mathcal{G}$ なので）$C \cap z$ は空集合である．ところが $z \neq \emptyset$ であるから $p \in z$ がとれて $C \subsetneq C \cup \{p\} \in \mathcal{G}$ となる．これは C の極大性に反する．□

これで定理 I.12.1 の(1), (2), (3), (4), (5)の同値性が証明できました．(6)と(7)について述べて定理の証明を済ませてしまいましょう．(6)も(7)も半順序集合に関わっています．これらについて定義 I.7.2 でいうところの狭義の半順序 $<$ を用いて書くことにします．ですから $x \leq y$ とは $x < y \vee x = y$ の略記と考えます．

定義 I.12.8　$<$ を集合 A 上の狭義半順序とする．部分集合 $C \subseteq A$ が**鎖**であるとは，C が $<$ によって全順序づけされていることをいう．さらに $X \supsetneq C$ をみたす鎖 X が存在しないとき C を**極大鎖**という．

定義 I.12.9　次の主張を**ハウスドルフ極大原理**という．$<$ を集合 A 上の狭義半順序とするとき，極大鎖 $C \subseteq A$ が存在する．

定義 I.12.10　次の主張を**ツォルンの補題**という．$<$ が集合 A 上の狭義半順序であって，条件

(✌) $C \subseteq A$ を任意の鎖とするとき，ある $b \in A$ が存在してすべての $x \in C$ について $x \leq b$ となる．

をみたすものとすると，任意の $a \in A$ に対して定義 I.7.18 の意味で極大な要素 $b \in A$ を $b \geq a$ となるようにとれる．

【定理 I.12.1 の証明】　(5) → (6) → (7) → (5) を示す．(5) → (6) については，鎖全体の族が有限特性の集合族であることに注目する．(6) → (7) については，a を要素にもつ極大鎖 C を考えると (✌) によって得られる b が極大要素になる．(7) → (5) については，$\mathcal{F}$ が有限特性の集合族であるとき，$\mathcal{F}$ を $\subsetneq$ で半順序づけしたものがツォルンの補題の仮定 (✌) をみたすことに注意すればよい．　□

選択公理の表現として，「純粋集合論」においては，選択函数の存在を保証する (2) と整列可能性原理 (3) とが最も頻繁に用いられるのですが，代数学，解析学，モデル理論などでは，(7) のツォルンの補題や (5) のタッキーの補題もよく用いられます．例 I.12.4 のように有限特性が明瞭な集合族があるので，タッキーの補題のほうが使いやすいことが多いのですが，あとで見る演習問題 I.12.15 のようにツォルンの補題のほうがより有用となるケースもあります．

代数や解析の教科書において，ベクトル空間の基底の存在や $\mathbb{R}$ のルベーグ不可測集合の存在において AC が用いられていることがよく指摘されていますが，もっと初歩的な AC の用例については，はっきりと言及せずにごまかしている場合が多いものです．たとえば

（1） 初級の微積分では，実数 a がなんらかの集合 X の集積点であるときには X の点からなる点列 $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ で a に収束するものがとれる，と学びます．このことの証明ではふつう $(a - 1/n, a + 1/n) \cap X$ から x_n を**選択**しています．ZF 集合論は，$\mathbb{R}$ において稠密だが $\omega \not\preccurlyeq X$ であるような集合 X の存在とも矛盾しないことがわかっています．このような X の要素の ω-列は十分先のほうでは定数値になってしまうものばかりです（このあとの演習問題 I.12.18 も参照）．

（2） 可算個の可算集合の和集合が可算であること．これは AC のもとでは（次に定理 I.12.11 で見るとおり）正しいのですが，ZF 集合論は $\mathbb{R}$ が可

算個の可算集合の和集合となることとも矛盾しません．また，不可算順序数 ω_1 が可算個の可算集合の和集合になることも ZF 集合論と矛盾しません．$\neg AC$ に関する無矛盾性の結果について，より詳しくは文献 [37] を見てください．

定理 I.12.11（AC）　κ を無限基数，$\mathcal{F}$ を集合族とし，$|\mathcal{F}| \leq \kappa$ かつすべての $X \in \mathcal{F}$ について $|X| \leq \kappa$ であるとすれば，$|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$ である．

【証明】　$\mathcal{F} \neq \emptyset$（でないと結果は言うまでもない）であり，$\emptyset \notin \mathcal{F}$（空集合があってもなくても和集合は変化しない）であると仮定しよう．演習問題 I.11.22 の結果により全射 $f\colon \kappa \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{F}$ をとれる．同様に各 $B \in \mathcal{F}$ ごとに全射 $g\colon \kappa \xrightarrow{\text{onto}} B$ が存在するので，AC によって各 $\alpha < \kappa$ について全射 $g_\alpha\colon \kappa \xrightarrow{\text{onto}} f(\alpha)$ を選ぶ．これにはまず集合 $\mathcal{S} := {}^{\kappa}(\bigcup \mathcal{F})$ を整列順序づけしておいて，$\mathrm{ran}(g) = f(\alpha)$ となる最小の $g \in \mathcal{S}$ を g_α とすればよい．これによって $h\colon \kappa \times \kappa \xrightarrow{\text{onto}} \bigcup \mathcal{F}$ が $h(\alpha, \beta) = g_\alpha(\beta)$ によって定められる．定理 I.11.32 により $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ なので，κ を $\bigcup \mathcal{F}$ の上へ写像でき，したがって（演習問題 I.11.22 の結果により）$|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$ である．　□

初歩的な AC の応用についてもう一つ．単射ではなく全射をもちいて集合のサイズの比較すなわち $B \preccurlyeq A$ の定義をおこなってよい，ということがあります．

補題 I.12.12（AC）　A と B は任意の集合，ただし $B \neq \emptyset$ だとする．単射 $g\colon B \xrightarrow{1-1} A$ が存在することと，全射 $f\colon A \xrightarrow{\text{onto}} B$ が存在することとは同値である．

【証明】　$\leftarrow$ の向きには f が与えられたとして AC を用いて $f \circ g$ が B 上の恒等函数になるように g をとりなさい．$\rightarrow$ の向きについては g が与えられたとして $b \in B$ を固定して $f = g^{-1} \cup ((A \setminus \mathrm{ran}(g)) \times \{b\})$ としなさい．
□

選択公理が必要だったのは $\leftarrow$ の向きだけでした．AC なしでこれが成立しなくなる例として，ZF では ω_1 から $\mathcal{P}(\omega)$ への単射の存在を証明できないのですが，逆方向の全射は作れるのです．

演習問題 I.12.13　$\mathcal{P}(\omega)$ を ω_1 の上へ写像できることを，AC を用いずに証明すること．
［ヒント］ $f\colon \mathcal{P}(\omega\times\omega) \xrightarrow{\text{onto}} \omega_1$ を，R が ω 上の整列順序のときは $f(R) = \mathrm{type}(R)$ となり，R が有限のときは $f(R) = |R|$ となるように定めなさい．
□

次の二つの演習問題は位相空間論への極大原理の応用例になっています．一つ目はツォルンの補題でもタッキーの補題でも同様に扱えますが，二つ目の問にふさわしい有限特性の集合族は作れないので，こちらにはツォルンの補題を用いることになります．

演習問題 I.12.14（AC）　X が可分でない距離空間で d がその距離函数であるとき，不可算な $E \subseteq X$ と正の数 ε を，E の相異なる 2 点 x と y についてつねに $d(x,y) > \varepsilon$ となるようにとれる．このことを示すこと．
［ヒント］ 各 n ごとに，集合 $E_n \subseteq X$ を，どの 2 点も $d(x,y) > 2^{-n}$ をみたす極大な集合としなさい．すると，$\bigcup_n E_n$ が X において稠密となる．□

演習問題 I.12.15（AC）　X と Y をコンパクトなハウスドルフ空間とするとき，連続写像 $f\colon X \to Y$ が**既約**であるということを，f が全射であって，しかし X のどんな真の閉部分集合 H についても $f(H) \neq Y$ となることだと定めよう．たとえば Y を閉区間 $[0,2] \subseteq \mathbb{R}$，$X$ を $([0,1]\times\{0\}) \cup ([1,2]\times\{1\}) \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ とするとき，X から Y への射影は既約である．さて，X と Y をコンパクトなハウスドルフ空間とするとき，任意の連続な全射 $f\colon X \xrightarrow{\text{onto}} Y$ に対して，閉集合 $Z \subseteq X$ を，$f{\restriction}Z\colon Z \xrightarrow{\text{onto}} Y$ であって $f{\restriction}Z$ が既約となるようにとれることを示しなさい．
［ヒント］ ツォルンの補題を用いて，$f{\restriction}Z$ が全射であるような閉集合 Z のうちで**極小**となるものをとりなさい（ここでは $<$ として $\supsetneq$ を用いることになる）．ツォルンの補題の仮定 (✌) を確かめるさいに，コンパクト性が用いられる．□

たとえ AC がなくても，有限集合や可算集合は定義（I.11.14）によって整列可能です．予備概念がもっと少なくて済む「有限」の定義が，1893 年にデデキントの [23] で提案されています．

定義 I.12.16　集合 A が**デデキント有限**であるとは，単射 $f\colon A \xrightarrow{1-1} A$ で $\mathrm{ran}(f) \neq A$ であるものが存在しないことをいう．

デデキントの補題 I.11.4 は，このような f が存在しない限りは無内容なものになることがわかります．

演習問題 I.12.17　$\omega \preccurlyeq A$ であることは A がデデキント有限でないことと同値である．このことを示しなさい．また，AC を仮定してデデキント有限が有限と同値なことを示しなさい．

選択公理がなくても距離空間の基本的な性質を定義することはできます．たとえば X が可分であるのは X そのものが有限であるかまたはサイズ ω の稠密集合をもつときだ，というように．そこで $\mathbb{R}$ は可分ですし，すべての可分な距離空間が第二可算になります．ところが，次の演習問題では，選択公理がないときには病理的な例が存在しうることを，ZF と矛盾しないことがわかっている仮定から導きます．

演習問題 I.12.18　集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ はデデキント有限だが有限ではないとする．X に $\mathbb{R}$ から誘導された通常の距離函数を入れたとする．このとき，X は可分ではないが，演習問題 I.12.14 の結果も成立しない．このことを示しなさい．

I.13　基数の算術

このセクションでは一貫して選択公理 AC を仮定します．そうすると，すべての集合が整列可能なので，すべての x について $|x|$ が定義されます．基数の足し算，かけ算，指数演算を，次のように定義します．

定義 I.13.1　κ と λ を基数とするとき

☞ $\boxed{\kappa + \lambda} = |\{0\} \times \kappa \cup \{1\} \times \lambda|$,

☞ $\boxed{\kappa \cdot \lambda} = |\kappa \times \lambda|$,

☞ $\boxed{\kappa^\lambda} = |{}^\lambda\kappa|$,

と定義する．基数の演算のことを言っていると文脈から明らかなときには囲みは省略する．とくに基数が $\aleph_\alpha$ と呼ばれているときは，基数の演算を考え

ているものとする．

他の文献では，この囲みが用いられることはまったくありませんので，順序数の演算か基数の演算かは読者が文脈から判断せねばなりません．「κ^λ」には順序数の指数演算と基数の指数演算すなわち $\boxed{\kappa^\lambda}$，それから函数の集合すなわち ${}^\lambda\kappa$ という三つの意味が考えられ，どれも実際用いられるので，文脈を見ることが大切になっています．囲みをあまりたくさん描くことになっても困るので，どの演算について話しているかを言葉ではっきり言う場合も多くなります．次の二つの補題でもそうしています．一つ目の補題は先ほど定義した基数の函数がいずれの引数についても単調非減少であるというものであり，二つ目は，有限の基数の場合にはすでによく知っている，算術の基本的な事実のいろいろを述べるものです．

補題 I.13.2　$\kappa, \lambda, \kappa', \lambda'$ が基数で $\kappa \le \kappa', \lambda \le \lambda'$ であれば，$\kappa + \lambda \le \kappa' + \lambda'$, $\kappa \cdot \lambda \le \kappa' \cdot \lambda'$ であり，$\kappa = \kappa' = \lambda = 0$ の場合を除いて $\kappa^\lambda \le (\kappa')^{\lambda'}$ である．ただし演算はすべて基数の演算だとする．

【証明】　一つ目と二つ目の不等式については $\{0\} \times \kappa \cup \{1\} \times \lambda \subseteq \{0\} \times \kappa' \cup \{1\} \times \lambda'$ と $\kappa \times \lambda \subseteq \kappa' \times \lambda'$ を用いる．三つ目について $\kappa' > 0$ のときは $\varphi\colon {}^\lambda\kappa \xrightarrow{1-1} {}^{\lambda'}\kappa'$ を $\varphi(f){\restriction}\lambda = f$ かつ $\lambda \le \xi < \lambda'$ のときは $\varphi(f)(\xi) = 0$ とすることで定める．なお，$\kappa = \kappa' = 0$ のときには（空な函数は $\emptyset$ から $\emptyset$ への写像なので）$0^0 = |{}^0 0| = |\{\emptyset\}| = 1$ であるのに，$\lambda > 0$ なら $0^\lambda = |{}^\lambda 0| = |\emptyset| = 0$ である．□

順序数の指数演算でも $0^0 = 1$ だったことに注意しましょう．

補題 I.13.3　κ, λ, θ を基数とするとき，基数の演算の意味において

（1）$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$

（2）$\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

（3）$(\kappa + \lambda) \cdot \theta = \kappa \cdot \theta + \lambda \cdot \theta$

（4）$\kappa^{(\lambda \cdot \theta)} = (\kappa^\lambda)^\theta$

（5）$\kappa^{\lambda + \theta} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\theta$

が，それぞれ成立する．

【証明】　(1) (2) (3) については任意の集合 A, B, C について $A \cup B = B \cup$

A, $A \times B \approx B \times A$, $(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$ に注意．(4) と (5) については補題 I.11.13 による．□

順序数の演算と基数の演算の両方にかかわる命題にはやはり囲みが必要です．次の補題がその一例ですが，これは順序数と基数についての和と積の定義からただちにわかるものです．

補題 I.13.4　任意の順序数 α と β について $|\alpha + \beta| = \boxed{|\alpha| + |\beta|}$ と $|\alpha \cdot \beta| = \boxed{|\alpha| \cdot |\beta|}$ が成立する．

たとえば $\alpha = \beta = \omega = |\omega|$ の場合，ω と $\omega + \omega$ と $\omega \cdot \omega$ とはそれぞれ別の順序数ですが，いずれも同じ濃度をもちます．指数演算についてはこの補題は成立しません．というのも，演習問題 I.11.34 によって ω^ω が可算順序数である一方で，$\boxed{\omega^\omega} = (\aleph_0)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ で，こちらは補題 I.13.9 によって不可算なのですから．

補題 I.13.5　κ と λ が有限基数のときは $\boxed{\kappa + \lambda} = \kappa + \lambda$, $\boxed{\kappa \cdot \lambda} = \kappa \cdot \lambda$, $\boxed{\kappa^\lambda} = \kappa^\lambda$ となる．

【証明】　有限順序数は（定理 I.11.17 によって）基数でもあるので，$\kappa + \lambda = |\kappa + \lambda| = \boxed{\kappa + \lambda}$ が補題 I.13.4 からわかる．積についても同様．

和と積についてこの補題が成立するとわかれば，λ に関する帰納法で指数演算の場合を証明できる．$\lambda = 0$ の場合と $\lambda = 1$ の場合は，順序数の意味でも基数の意味でも $\kappa^0 = 1$, $\kappa^1 = \kappa$ となるので簡単だ．いま $\boxed{\kappa^\lambda} = \kappa^\lambda$ だったと仮定する．このとき $\boxed{\kappa^\lambda}$ は有限である．有限の基数の和と積が順序数の演算と一致することはすでに知っているので，補題 I.13.3 から $\boxed{\kappa^{\lambda+1}} = \boxed{\kappa^\lambda} \cdot \kappa$ が得られる．いっぽう $\kappa^{\lambda+1} = \kappa^\lambda \cdot \kappa$ であることもわかっているので，結局 $\boxed{\kappa^{\lambda+1}} = \kappa^{\lambda+1}$ となる．□

補題 I.13.6　κ と λ が基数で，少なくとも一方は無限であるとする．このとき $\boxed{\kappa + \lambda} = \max(\kappa, \lambda)$ である．さらにどちらも 0 ではないとすれば $\boxed{\kappa \cdot \lambda} = \max(\kappa, \lambda)$ でもある．

【証明】　$\kappa \leq \lambda$ であって λ が無限であると仮定しよう．定義から明らかに

$\lambda \preccurlyeq \boxed{\kappa + \lambda} \preccurlyeq \lambda \times \lambda$ であるから，（定理 I.11.32 から）$\lambda \times \lambda \approx \lambda$ であることにより $\boxed{\kappa + \lambda} = \lambda$ となる．$\kappa \neq 0$ のときは積についても同様に議論できる．□

この二つの補題のおかげで，基数の和と積は有限のときは順序数の演算と同じであり，無限のときは大きい方を求めるだけであって，それほど面白いものではありません．和や積の記法はおもに，補題 I.13.3 のような一般的な主張をするときに有用となります．これに対して，基数の指数演算は連続体仮説とも関連していて，根本的な重大事です．まず補題 I.11.11 と定理 I.11.19 によって次のことがわかります．

補題 I.13.7　すべての基数 κ について $2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|$ である．すべての順序数 α について $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$ である．ここで指数演算はいずれも基数としての演算である．

定義 I.13.8　**連続体仮説**（CH）とは，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という主張のこと．**一般連続体仮説**（GCH）とは $\forall\alpha[\,2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\,]$ という主張のことである．ここで指数演算はいずれも基数としての演算である．

この 2^λ の値を知れば，冪乗 κ^λ についてたくさんのことがわかるのです．とくに GCH のもとでは，起こりうる場合をすべて検討すると，κ^λ がいたって簡明な式で求められることがわかります（定理 I.13.14 参照）．$1^\lambda = 1$ となるのは当然ですが，また次のこともわかります．

補題 I.13.9　$2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$ で λ が無限のとき $\kappa^\lambda = 2^\lambda$ である．ここで指数演算はいずれも基数としての演算である．

【証明】　補題 I.13.2, I.13.3, I.13.6 から $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda$ となる．□

ですから無限基数の算術は有限基数の算術よりもいくぶん単純になっています．ただし，$\lambda < \kappa$ の場合の κ^λ はちょっとこみ入っています．GCH を仮定すると定理 I.13.14 から $(\aleph_3)^{\aleph_0} = \aleph_3$，$(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ なのに，$(\aleph_\omega)^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$ となるのです．ここで鍵となる $\aleph_\omega$ の特徴は，共終数が可算だということです．

定義 I.13.10　γ を任意の極限順序数とするとき，γ の**共終数**とは

$$\mathrm{cf}(\gamma) = \min\{\, \mathrm{type}(X) : X \subseteq \gamma,\ \sup(X) = \gamma \,\}$$

で定まる $\mathrm{cf}(\gamma)$ のことである．$\mathrm{cf}(\gamma) = \gamma$ であるとき，γ は**正則である**という．

この $\sup(X) = \gamma$ というのは X が γ の中で有界でないということにほかなりません．X として γ 自身をとってみればそうなるので，$\mathrm{cf}(\gamma) \le \gamma$ です．いま $\gamma = \omega^2$ のときを考えてみると，$\omega \cup \{\omega \cdot n : n \in \omega\}$ は γ の中で非有界で順序型 $\omega \cdot 2$ をもちます．ところが $\{\omega \cdot n : n \in \omega\}$ も γ の中で非有界（同じことを γ の中で共終である，ともいいます）で，こちらは順序型 ω をもちます．そしてこの ω が最小であるのは，$X \subseteq \gamma$ が有限集合だったら，X の最大要素があるので有界にならざるを得ないことからわかります．こうして $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$ となるわけです．次の補題が共終数を求めるさいの助けになるでしょう．

補題 I.13.11　すべての極限順序数 γ について

（1）$A \subseteq \gamma$ かつ $\sup(A) = \gamma$ のとき $\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\mathrm{type}(A))$ となる．

（2）$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\gamma)) = \mathrm{cf}(\gamma)$．したがって $\mathrm{cf}(\gamma)$ は正則である．

（3）$\omega \le \mathrm{cf}(\gamma) \le |\gamma| \le \gamma$ となる．

（4）γ が正則であれば，γ は基数である．

（5）$\gamma = \aleph_\alpha$ で α が 0 あるいは後続型順序数であれば，γ は正則である．

（6）$\gamma = \aleph_\alpha$ で α が極限順序数であれば，$\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\alpha)$ である．

【証明】　(1) について：$\alpha = \mathrm{type}(A)$ とおく．A が γ の中で非有界なので α は極限順序数である．$f\colon \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A$ を α から A の上への同型写像としよう．$\mathrm{cf}(\gamma) \le \mathrm{cf}(\alpha)$ を見るために Y を α の任意の非有界部分集合とすれば $f``Y$ は γ の非有界部分集合で Y と同じ順序型をもつ．とくに Y として順序型 $\mathrm{cf}(\alpha)$ のものをとれば，γ の非有界部分集合で順序型 $\mathrm{cf}(\alpha)$ のものがとれる．次に $\mathrm{cf}(\alpha) \le \mathrm{cf}(\gamma)$ を見るために，$X \subseteq \gamma$ かつ X の順序型が $\mathrm{cf}(\gamma)$ となるように，γ の非有界部分集合 X をとろう．$\xi \in X$ のとき $h(\xi)$ を A の要素のうち ξ 以上のものの中で最小のものとする．このとき $\xi < \eta \to h(\xi) \le h(\eta)$ となっている．$X' = \{\, \eta \in X : \forall \xi \in X \cap \eta [\, h(\xi) < h(\eta) \,] \,\}$ と

おく．すると，$h{\restriction}X' \colon X' \xrightarrow{1-1} A$ であって $h{\restriction}X'$ は順序保存写像である．さらに $h(X')$ は A の中で非有界である．A の順序型が α だったので $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{type}(X') \leq \mathrm{type}(X) = \mathrm{cf}(\gamma)$ となる（演習問題 I.8.22 参照）．

(2) について： A を γ の非有界部分集合で順序型 $\mathrm{cf}(\gamma)$ のものとして (1) を用いればよい．

(3) について： $\omega \leq \mathrm{cf}(\gamma)$ と $|\gamma| \leq \gamma$ とは定義から明らか．そこで $\kappa = |\gamma|$ とおく．$\mathrm{cf}(\gamma) \leq \kappa$ を示すため，全射 $f \colon \kappa \xrightarrow{\text{onto}} \gamma$ をとろう．函数 $g \colon \kappa \to ON$ を再帰によって $g(\eta) = \max(f(\eta), \sup\{g(\xi)+1 : \xi < \eta\})$ と定めよう．すると，$\xi < \eta \to g(\xi) < g(\eta)$ となるので，g はその値域の上への同型写像になっている．もしも $\mathrm{ran}(g) \subseteq \gamma$ であれば，$\mathrm{ran}(g)$ は γ の部分集合で順序型 κ をもち，（$g(\eta) \geq f(\eta)$ なので）γ の中で非有界である．したがって $\mathrm{cf}(\gamma) \leq \kappa$ となる．もしも $\mathrm{ran}(g) \not\subseteq \gamma$ であれば，$g(\eta) \geq \gamma$ となる最小の η をとる．この η は極限順序数である．というのは，$g(\xi+1) = \max(g(\xi)+1, f(\xi+1))$ なので $g(\xi) < \gamma$ なら $g(\xi+1) < \gamma$ となるから．そこで，$g``\eta$ は γ の非有界部分集合でその順序型は η である．したがって $\mathrm{cf}(\gamma) \leq \eta < \kappa$ である．

(4) について： (3) と $\mathrm{cf}(\gamma) = \gamma$ から $|\gamma| = \gamma$ が出てくる．

(5) について： $\aleph_0$ は ω であってこれは (3) によって正則である．$\aleph_{\beta+1}$ が正則であることを示すために，$A \subseteq \aleph_{\beta+1}$ とし，$\mathrm{type}(A) < \aleph_{\beta+1}$ としよう．すると，$|A| \leq \aleph_\beta$ であるから $\sup(A)$ つまり $\bigcup A$ はサイズ $\aleph_\beta$ 以下の集合たちの $\aleph_\beta$ 個以下の和集合である．そこで AC のもとで定理 I.12.11 によって $|\sup(A)| \leq \aleph_\beta$ となり，したがって $\sup(A) < \aleph_{\beta+1}$ である．

(6) について： $A = \{\aleph_\xi : \xi < \alpha\}$ とおいて (1) を用いればよい．　□

この (1) によって $\mathrm{cf}(\alpha+\beta) = \mathrm{cf}(\beta)$ となります（$A = \{\alpha+\xi : \xi < \beta\}$ を考えてごらんなさい）．(3) により ω_1 未満の極限順序数の共終数はどれも ω です．同様に，ω_2 未満の極限順序数はどれも（$\omega_1 + \omega$ のように）共終数 ω をもつか，（$\omega_1 + \omega_1$ のように）共終数 ω_1 をもつわけです．

また，(4) により正則な順序数は基数になります．次の定理の (1) は定理 I.12.11 を一般化するものです．定理 I.12.11 は次の定理で $\theta = \kappa^+$ とした特別な場合といえます．

定理 I.13.12　θ を任意の無限基数とする．

（1） θ が正則で，$\mathcal{F}$ は集合族で $|\mathcal{F}| < \theta$ であり，各 $S \in \mathcal{F}$ について $|S| < \theta$ となっているとすれば，$|\bigcup \mathcal{F}| < \theta$ である．

（2） $\mathrm{cf}(\theta) = \lambda < \theta$ のとき，θ の部分集合からなる集合族 $\mathcal{F}$ で，$|\mathcal{F}| = \lambda$ であり，各 $S \in \mathcal{F}$ について $|S| < \theta$ となっていて，しかも $\bigcup \mathcal{F} = \theta$ となるものが存在する．

【証明】　(1) については $X = \{|S| : S \in \mathcal{F}\}$ とすると $X \subseteq \theta$ かつ $|X| < \theta$，したがって $\mathrm{type}(X) < \theta$ であり，それゆえ $\sup(X) < \theta$ となる．$\kappa = \max(\sup(X), |\mathcal{F}|)$ とすると $\kappa < \theta$ である．κ が無限なら定理 I.12.11 より $|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$ である．κ が有限なら $\bigcup \mathcal{F}$ も有限であり，どちらにせよ $|\bigcup \mathcal{F}| < \theta$ である．

(2) については，θ の順序型 λ の部分集合 $\mathcal{F}$ を $\sup(\mathcal{F}) = \bigcup \mathcal{F} = \theta$ となるようにとればよい．□

不等式 $2^\lambda > \lambda$ を示したカントールの対角線論法を拡張して次の定理が得られます．

定理 I.13.13（ケーニヒ，1905 年）　$\kappa \geq 2$ で λ が無限ならば $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$ である．

【証明】　$\theta = \kappa^\lambda$ とおこう．θ は無限基数である．$\theta^\lambda = \kappa^{\lambda \cdot \lambda} = \kappa^\lambda = \theta$ となっている．そこで函数の集合 ${}^\lambda\theta$ を $\{ f_\alpha : \alpha < \theta \}$ とリストアップしよう．もしも $\mathrm{cf}(\theta) \leq \lambda$ だったら，定理 I.13.12 の (2) により $\theta = \bigcup_{\xi < \lambda} S_\xi$ で各 S_ξ が $|S_\xi| < \theta$ をみたすように順序数 θ を分解できる．ところが函数 $g\colon \lambda \to \theta$ を $g(\xi) = \min(\theta \setminus \{ f_\alpha(\xi) : \alpha \in S_\xi \})$ と定義すれば，$g \in {}^\lambda\theta$ であるが g がどの f_α とも異なることになって矛盾する．□

たとえば $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \omega$ なので $2^{\aleph_0}$ が $\aleph_\omega$ となることはありえません．いっぽう，粗い言い方をすれば，$2^{\aleph_0}$ は $\aleph_1$ や $\aleph_7$ や $\aleph_{\omega+1}$ や $\aleph_{\omega_1}$ など，共終数が不可算であるような基数のいずれであったとしても矛盾はしません．文献 [15,16,36,41] を参照してください．

次の定理は GCH のもとで κ と λ の少なくとも一方が無限である場合に κ^λ を計算する方法を教えてくれます．これは，ケーニヒの定理を考慮した

うえで可能な最小値になるというものです．なお κ と λ の一方が 0 や 1 であるつまらない場合は，ここでは省略してあります．

定理 I.13.14　*GCH* を仮定する．κ と λ は基数で $\max(\kappa, \lambda)$ は無限であるとする．このとき

（1）$2 \leq \kappa \leq \lambda^+$ のとき $\kappa^\lambda = \lambda^+$ となる．

（2）$1 \leq \lambda \leq \kappa$ のとき κ^λ は $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ なら κ になり，$\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$ なら κ^+ になる．

【証明】　(1) は補題 I.13.9 からすぐにわかる．(2) については *GCH* から $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$ となるので κ^λ は κ か κ^+ のどちらかであるが，$\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$ であればケーニヒの定理によって κ^λ は κ ではありえないので κ^+ になる．$\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ のときは函数 $f\colon \lambda \to \kappa$ はどれも有界であるから ${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\lambda\alpha$ となっている．どの ${}^\lambda\alpha$ も $\mathcal{P}(\lambda \times \alpha)$ の部分集合であって $|\lambda \times \alpha| < \kappa$ であるから，*GCH* により $|{}^\lambda\alpha| \leq \kappa$ となる．ゆえに $|{}^\lambda\kappa| \leq \kappa$ である．□

実は (1) と (2) はわずかながら重複していることがわかります．κ が λ あるいは λ^+ のときは $\kappa^\lambda = \kappa^+$ となりますが，これは (1) と (2) のどちらを用いても示すことができるでしょう．

先の定義 I.11.30 との類推で次のように定義します．

定義 I.13.15　ベート函数 $\beth_\xi$ を ξ に関する再帰によって

☞ $\beth_0 = \aleph_0 = \omega$,

☞ $\beth_{\xi+1} = 2^{\beth_\xi}$,

☞ η が極限順序数のとき $\beth_\eta = \sup\{\beth_\xi : \xi < \eta\}$

と定める．

そこで，*CH* は $\beth_1 = \aleph_1$ という主張と同値ですし，*GCH* はすべての ξ について $\beth_\xi = \aleph_\xi$ である，という主張と同値です．

定義 I.13.16　基数 κ が**弱到達不能である**とは，$\kappa > \omega$ であって κ は正則であり，κ 未満のすべての基数 λ について $\lambda^+ < \kappa$ となることをいう．基数 κ が**強到達不能である**とは，$\kappa > \omega$ であって κ は正則であり，κ 未満の

すべての基数 λ について $2^\lambda < \kappa$ となることをいう.

この定義により，強到達不能基数は弱到達不能でもあり，また GCH のもとではこれらの概念は同値になります．演習問題 I.11.33 を焼きなおして，

演習問題 I.13.17 基数 κ が弱到達不能であるとき，κ はクラス $\{\alpha : \alpha = \aleph_\alpha\}$ の κ 番目の要素である．基数 κ が強到達不能であるとき，κ はクラス $\{\alpha : \alpha = \beth_\alpha\}$ の κ 番目の要素である.

弱到達不能基数が存在することを ZFC から証明することはできません（[36] や [41] を参照）．しかし演習問題 I.11.33 の方法によれば，ZFC の範囲内で次のことは示せます.

演習問題 I.13.18 $\alpha = \beth_\alpha$ をみたす α が存在することを証明しなさい.

エルデシュにしたがい，次のように定義します.

定義 I.13.19 $[A]^\kappa = \{x \subseteq A : |x| = \kappa\}$，そして $[A]^{<\kappa} = \{x \subseteq A : |x| < \kappa\}$ と定める.

演習問題 I.13.20 λ を無限基数とし，κ は基数で $\kappa \le \lambda$ となるものとしよう．このとき $|[\lambda]^\kappa| = \lambda^\kappa$ である．また，$0 < \kappa \le \lambda$ のとき $|[\lambda]^{<\kappa}| = \sup\{\lambda^\theta : \theta < \kappa\}$ である．とくに $|[\lambda]^{<\omega}| = \lambda$ である.

演習問題 I.13.21 A が体 K 上のベクトル空間であり，B は A の基底であるとしよう．$B \neq \emptyset$ であり $\max(|B|, |K|) \ge \aleph_0$ であるとする．このとき $|A| = \max(|B|, |K|)$ であることを証明しなさい．このことから，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ とがアーベル群としては同型であることを導きなさい.
[ヒント] $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみれば，いずれも次元は $2^{\aleph_0}$ である．□

なお B と K の両方が有限であるときは当然 $|A| = |K|^{|B|}$ となります．ここでは一貫して AC が仮定されていたことに改めて注意しましょう．AC がなくても $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ の上への全単射を作ることが可能（演習問題 I.11.3 参照）ですが，それらはどれも群の同型写像にはなりません.

I.14　基礎の公理

基礎の公理はセクション I.2 に述べたとおりで，これは関係 $\in$ が定義 I.7.18 の意味で V 上整礎的であると主張するものです．つまり，V の空でない部分集合（すなわち任意の空でない集合）はどれも $\in$-極小要素をもつ，という主張です．この主張が

$$\forall x[\, x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x(y \cap x = \emptyset)\,]$$

と同値になることは明らかです．集合論の中で数学を展開するにあたって，基礎の公理は全然関連してきません．それなら，この公理が何を言わんとしていて，なぜ公理の一つになっているのか，と疑問に思うのはもっともなことです．

一つ簡単な回答として，基礎の公理は $\in$ のサイクルをもつような「病的な集合」を排除します．たとえば $a \in a$ だったとして，$x = \{a\}$ とおけば，x のただ一つの要素 a について $x \cap a = x \neq \emptyset$ なので，この x は基礎の公理の反例になります．より一般に，もしも $a_1 \in a_2 \in \cdots \in a_n \in a_1$ だったなら，$x = \{\, a_1, a_2, \cdots, a_n \,\}$ とすれば基礎の公理の反例になるので，関係 $\in$ がサイクルをもたないことが基礎の公理からわかります．

ブタやアヒルのような集合でないものは，外延性の公理によってわたくしたちの考察の対象である集合の宇宙から排除されました（23 ページ，図 I.1）．次に基礎の公理が，$a \in a$ あるいは $b \in c \in b$ といった集合をわたくしたちの考察の対象である集合の宇宙から排除します（104 ページ，図 I.2）．外延性の公理も基礎の公理も，ブタやアヒルや先ほどの a, b, c のような集合が「現実の世界」（それが何であるかによらず）に実在するかどうかといった，なんらかの哲学的なコメントをするものではありません．

先ほどの a, b, c のような集合は数学の対象を構成するうえで決して登場しないものであることが**わかっています**ので，そうした集合は，実在するかもしれないし実在しないかもしれないけれど，実在しようがしまいが数学にはなんら影響がないという，アヒルやブタやトロールと同様の哲学的地位にあるわけです．いま言ったインフォーマルな「わかっています」を理論に組み入れてしまおうというのが，このセクションの目的です．そのために，すべての**整礎的集合**のなす V の部分クラス WF を定義し，数学全体が WF

の中で繰り広げられることを示します．基礎の公理は $V = WF$ という主張と同値となります（定理 I.14.10）．すべての数学の対象，たとえば $\mathbb{Q}$ も $\mathbb{R}$ も，どのみち整礎的集合なので，基礎の公理は数学を展開するにあたってまったく用いられないのです．

粗く言えば，整礎的集合とは何もない状態から，あるいは $\emptyset$ から始めて，**集めること**を，すなわち，いくつかの集合をとってきて中カッコ $\{\cdots\}$ の中に入れることを，反復して得られる集合のことです．これを建築工事とみなすとして，第 0 段階を $\emptyset$ から始めます．第 1 段階ではこの $\emptyset$ を中カッコで囲んで $\{\emptyset\}$ すなわち 1 を作ります．これで 0 と 1 が作られたので，$\{0, 1\}$ の 4 つの部分集合のすべてを第 2 段階で作ることができます．このうち $\{0\}$ すなわち 1 と，$\{\}$ すなわち空集合あるいは 0 は，前からもっていたものです．あと 2 つの新しく得られた集合が，表 I.2 でいう**ランク 2** の集合です．すでに 0 と 1 と 2 と $\{1\}$ が作られていますので，第 3 段階では $2^4 = 16$ 個の部分集合を作ることができますが，このうち 4 つは前からもっていたもの，残る 12 個がランク 3 の集合です．これら 16 個の集合を表 I.2 に掲げます．この 16 個がランク 0, 1, 2, 3 の集合の全体である $R(4)$ を形づくります．ここまでの工事（構成）を一般化したのが，次の定義です．

表 I.2　はじめの 16 個の集合

ランク	集合
0	$\emptyset = 0$
1	$\{\emptyset\} = 1$
2	$\{\{\emptyset\}\} = \{1\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$
3	$\{\{1\}\}$,$\{0, \{1\}\}$,$\{1, \{1\}\}$,$\{0, 1, \{1\}\}$, $\{2\}$,$\{0, 2\}$,$\{1, 2\}$,$\{0, 1, 2\} = 3$, $\{\{1\}, 2\}$,$\{0, \{1\}, 2\}$,$\{1, \{1\}, 2\}$,$\{0, 1, \{1\}, 2\}$

定義 I.14.1　順序数 α に関する再帰によって集合 $R(\alpha)$ を

（1） $R(0) = \emptyset$,

（2） $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$,

（3） γ が極限順序数のとき $R(\gamma) = \bigcup_{\alpha < \gamma} R(\alpha)$

と定め，さらに

（4） $WF = \bigcup_{\delta \in ON} R(\delta)$（整礎的集合全体のクラス），

（5） $\exists\delta[\, x \in R(\delta)\,]$ のとき集合 x は**整礎的**であるといい，

（6） $x \in WF$ のとき，$x \in R(\alpha+1)$ をみたす最小の α を集合 x の**ランク**といい $\mathrm{rank}(x)$ と書く．

あとの補題 I.14.5 により，WF はすべての順序数を含む真クラスです．ですから，ON と同様に WF も，実際には存在しないのですけれども，記法として有用なのです．つまり，「x は整礎的集合である」と書く代わりに $x \in WF$ と書いたり，$\forall y \in x \exists\delta[\, y \in R(\delta)\,]$ と書く代わりに $x \subseteq WF$ と書けるわけです．ただし本当をいえば先ほどの定義 I.14.1 の(6)の正当性は確認を要するでしょう．これについては次のとおりです．

補題 I.14.2　$x \in WF$ のとき，$x \in R(\delta)$ をみたす最小の δ は後続型順序数である．

【証明】　定義 I.14.1 の(1)から $\delta \neq 0$ であり，同じく(3)から δ は極限順序数でもない．□

まず $|R(0)| = 0$ であり，$R(n+1)$ は $R(n)$ の冪集合なので，$R(n+1)$ のサイズは $2^{|R(n)|}$ であることがわかります．そこで，

$$|R(1)| = 1, \quad |R(2)| = 2^1 = 2, \quad |R(3)| = 2^2 = 4,$$
$$|R(4)| = 2^4 = 16, \quad |R(5)| = 2^{16} = 65536,$$

などとなるわけです．$R(3)$ の 4 つの要素とは，ランクが 0 か 1 か 2 となる 4 つの集合のことです．また $R(4)$ の 16 個の要素のうち 4 つはすでに $R(3)$ に属していて，そうでない 12 個の集合がランク 3 の集合です．

演習問題 I.14.3　ランク 4 の集合 65520 個のリストを作ること．これはあとの演習問題 I.14.14 をコンピュータで解くプログラムを書けば，それを用いて簡単に済むだろう．

補題 I.14.4

（1） どの $R(\beta)$ もみな推移的集合である．

（2） $\alpha \leq \beta$ のとき $R(\alpha) \subseteq R(\beta)$ である．

（3） $R(\alpha+1) \setminus R(\alpha) = \{\, x \in WF : \mathrm{rank}(x) = \alpha \,\}$ となる．

（4）$R(\alpha) = \{x \in WF : \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$ である.

（5）$x \in y$ であって y が WF に属するなら，$x \in WF$ であり，しかも $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$ である.

【証明】 (1) は β に関する帰納法. $\beta = 0$ のとき $R(\beta) = 0$ でこれは推移的. 極限の場合は推移的集合たちの和も推移的集合になるという事実による. 最後に $R(\beta)$ が推移的と仮定して $R(\beta+1)$ も推移的集合であることを示そう. $R(\beta)$ の要素がどれも $R(\beta)$ の部分集合でもあるのだから $R(\beta) \subseteq \mathcal{P}(R(\beta)) = R(\beta+1)$ がわかる. そこで $x \in R(\beta+1) = \mathcal{P}(R(\beta))$ であれば $x \subseteq R(\beta) \subseteq R(\beta+1)$ であるから $R(\beta+1)$ は推移的集合である.

(2) について，α を固定しておいて α 以上の順序数 β に関する帰納法で $R(\alpha) \subseteq R(\beta)$ を示す. $\beta = \alpha$ のときは言うべきことはない. 後続型順序数の段階は $R(\beta) \subseteq R(\beta+1)$ であることから導かれる. また $\beta > \alpha$ で β が極限のときは $R(\beta) = \bigcup_{\xi<\beta} R(\xi) \supseteq R(\alpha)$ である.

(3) と (4) はランクの定義と (2) からすぐにわかる.

(5) については，$\alpha = \mathrm{rank}(y)$ とおくと $y \in R(\alpha+1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$ なので $x \in R(\alpha)$，したがって (4) より $\mathrm{rank}(x) < \alpha$ となる. □

図 I.2 には WF の要素のいくつかが書き込まれています. これらはそれぞれ適切な高さに置き，$\in$ 関係をあらわす矢印も何本か書き加えておきました. 補題 I.14.4 の (5) によれば，WF は推移的クラスであり，$\in$ の矢印はすべて上を向くことになります. なお，図に示した $-2/3$ や $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ のランクは，セクション I.15 でこれらのオブジェクトに与える特定の集合論的定義によって定まるものです（定義のしかたによっては異なる値になる可能性があります）.

順序数 0, 1, 2, 3 がそれぞれランク 0, 1, 2, 3 をもつことが表 I.2 からわかります. このことは次のように一般化されます.

補題 I.14.5

（1）どの $\alpha \in ON$ についても $ON \cap R(\alpha) = \alpha$ となる.

（2）$ON \subseteq WF$ である.

（3）どの $\alpha \in ON$ についても $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$ である.

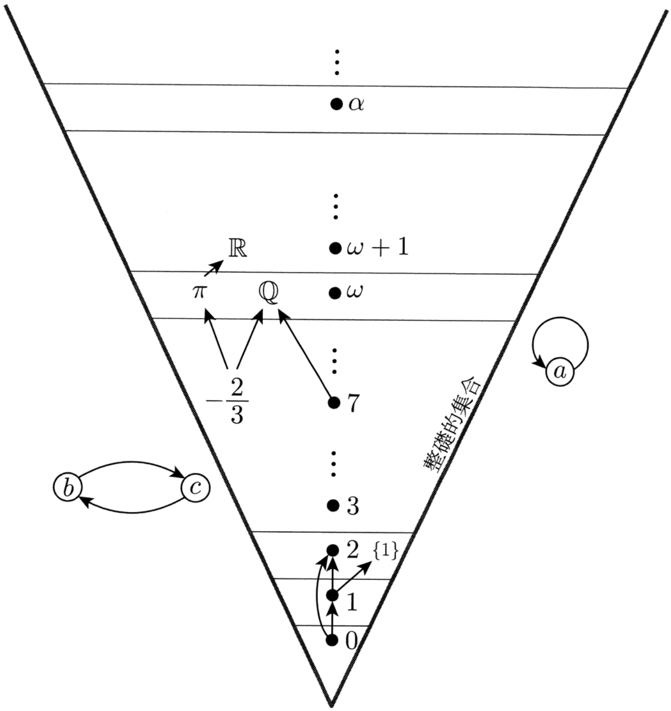


図 **I.2**　*ZF* 集合論の宇宙

【証明】　α に関する帰納法で(1)を示す．α が 0 のときと極限であるときは簡単だ．次に $ON \cap R(\alpha) = \alpha$ と仮定して $ON \cap R(\alpha+1) = \alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ となることを示そう．$\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq R(\alpha+1)$ であることは $\alpha \subseteq R(\alpha) \subseteq R(\alpha+1)$ と $\alpha \in \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1)$ からわかる．次に δ を $R(\alpha+1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$ に属する任意の順序数としなさい．すると $\delta \subseteq R(\alpha) \cap ON = \alpha$ なので $\delta \leq \alpha$ である．そこで $ON \cap R(\alpha+1) = \{\delta : \delta \leq \alpha\} = \alpha+1$ となる．

(1)から $\alpha \in R(\alpha+1) \setminus R(\alpha)$ となり，このことから(2)と(3)が得られる．□

順序数以外の集合のランクを求めるときには次の公式が有用です．

補題 I.14.6　任意の集合 y について，$y \in WF \leftrightarrow y \subseteq WF$ である．またこ

のとき

$$\mathrm{rank}(y) = \sup\{\,\mathrm{rank}(x) + 1 : x \in y\,\}$$

となる.

【証明】 $y \in WF$ のとき補題 I.14.4 の (5) により $y \subseteq WF$ である. 逆に, $y \subseteq WF$ のとき, $\beta = \sup\{\,\mathrm{rank}(x)+1 : x \in y\,\}$ とおくと $y \subseteq R(\beta)$ なので $y \in R(\beta+1)$ である. したがって $y \in WF$ であり $\mathrm{rank}(y) \le \beta$ である. いっぽう, $x \in y$ なら必ず $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$ なので $\mathrm{rank}(x)+1 \le \mathrm{rank}(y)$ である. すべての x についてこの上限をとると $\beta \le \mathrm{rank}(y)$ を得る. □

集合を明示的に書き下せるなら, ランクはこの補題を用いて計算できます. たとえば 2 と 5 は順序数なので $\mathrm{rank}(2) = 2$, $\mathrm{rank}(5) = 5$ であって, それゆえ $\mathrm{rank}(\{2,5\}) = \max\{3,6\} = 6$, また $\mathrm{rank}(\{2\}) = 3$ となります. そこで $\mathrm{rank}(\langle 2,5\rangle) = \mathrm{rank}(\{\{2\},\{2,5\}\}) = \max\{4,7\} = 7$ となります. このあとの二つの補題ではランクに関する一般的な事実を述べています. 一つ目は補題 I.14.6 からすぐにわかるものです.

補題 I.14.7　$z \subseteq y \in WF$ のとき $z \in WF$ であり $\mathrm{rank}(z) \le \mathrm{rank}(y)$ である.

補題 I.14.8　$x, y \in WF$ であるとしよう. このとき,

（1） $\mathrm{rank}(\{x,y\}) = \max(\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)) + 1$.

（2） $\mathrm{rank}(\langle x,y\rangle) = \max(\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)) + 2$.

（3） $\mathcal{P}(x) \in WF$ であって $\mathrm{rank}(\mathcal{P}(x)) = \mathrm{rank}(x) + 1$.

（4） $\bigcup x \in WF$ であって $\mathrm{rank}(\bigcup x) \le \mathrm{rank}(x)$ である.

（5） $x \cup y \in WF$ であって $\mathrm{rank}(x \cup y) = \max(\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y))$ である.

（6） $\mathrm{trcl}(x) \in WF$（定義 I.9.5 参照）であって $\mathrm{rank}(\mathrm{trcl}(x)) = \mathrm{rank}(x)$ である.

【証明】 (1) と (2) は補題 I.14.6 からすぐにわかる. (3) について, $x \in WF$ とすると補題 I.14.7 からどの $y \subseteq x$ についても $y \in WF$ かつ $\mathrm{rank}(y) \le \mathrm{rank}(x)$ となる. そこで補題 I.14.6 を用いて $\mathcal{P}(x) \in WF$ と $\mathrm{rank}(\mathcal{P}(x)) =$

$\sup\{\,\mathrm{rank}(y)+1 : y \subseteq x\,\} = \mathrm{rank}(x)+1$ を得る．(4) (5) (6) も補題 I.14.6 を用いて同様に示される．□

演習問題 I.14.9　$x \in WF$ であるものとする．$\mathrm{rank}(x)$ が 0 あるいは極限順序数であるなら $\mathrm{rank}(\bigcup x) = \mathrm{rank}(x)$ であり，$\mathrm{rank}(x) = \alpha + 1$ であるなら $\mathrm{rank}(\bigcup x) = \alpha$ である．このことを示しなさい．

これまでに，WF がすべての順序数を含み，たとえば補題 I.14.8 にあげたような標準的な集合論的操作のもとで閉じていることがわかりました．そうすると，WF がすべてを含んでいるとしても，驚くにはあたらないのかもしれません．基礎の公理を仮定すると，実際そのようになります．

定理 I.14.10（ZF^-）　基礎の公理は $V = WF$ という主張と同値である．

【証明】　$\leftarrow$ について．$x \in WF$ かつ $x \neq \emptyset$ だったとき，x の要素のうちでランクが最小のもの $y \in x$ をとれば $y \cap x = \emptyset$ である．

$\rightarrow$ について．基礎の公理を仮定し，集合 x を固定する．$t = \mathrm{trcl}(x)$ とおく（演習問題 I.9.6 参照）．すると t は推移的集合である．$t \subseteq WF$ であれば $x \subseteq t \subseteq WF$ なので補題 I.14.6 により $x \in WF$ である．そこで，次に $t \not\subseteq WF$ と仮定しよう．$t \setminus WF \neq \emptyset$ なので基礎の公理から $y \in t \setminus WF$ かつ $y \cap (t \setminus WF) = \emptyset$ となる y がとれる．しかし t が推移的集合なので $y \subseteq t$ であり，$y \subseteq WF$ だから $y \in WF$ となる．これは矛盾である．□

ここで $\mathrm{trcl}(x)$ が用いられたのが自然な成りゆきであることがわかるでしょうか．基礎の公理を，インフォーマルに，集めることの超限系列によってあらゆる x が無から得られると言っているものと解するなら，$\mathrm{trcl}(x)$ とは x を得る過程（67 ページの図を見なさい）において構成されるすべての集合からなる集合にほかなりません．x を作るまでに用いられる集合たちのランクが途中の順序数を抜かすことはありません．いいかえれば，$S = \{\,\mathrm{rank}(z) : z \in \mathrm{trcl}(x)\,\}$ とおくとき，S は ON のはじめの一区画（すなわち始切片）をなし，これと（補題 I.8.16 によれば）同じことですが $S \in ON$ が成立します．

補題 I.14.11　$t \in WF$ で t が推移的集合のとき，$\{\mathrm{rank}(z) : z \in t\} \in$

ON である.

【証明】 $S = \{\mathrm{rank}(z) : z \in t\}$ とおく．S に属しない最小の順序数を α とする．したがって $\alpha \subseteq S$ である．$\alpha = S$ であることを示そう．そうでなかったとして，$S \setminus \alpha$ に属する最小の順序数 β をとる．すると $\beta > \alpha$ であり，どの $z \in t$ についても $\mathrm{rank}(z) < \alpha$ か $\mathrm{rank}(z) \geq \beta$ のどちらかが成立する．$v \in t$ かつ $\mathrm{rank}(v) = \beta$ となる v をとろう．補題 I.14.6 より $\mathrm{rank}(v) = \sup\{\mathrm{rank}(z) + 1 : z \in v\}$ である．$z \in v$ のとき，t が推移的なので $z \in t$ であり，また $\mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(v) = \beta$ であるから，$\mathrm{rank}(z) < \alpha$ となる．しかしそうすると $\mathrm{rank}(v) \leq \alpha$ ということになるが，これは矛盾である． □

とくに，t が 0 でなければ $0 \in t$ であり，t が 0 でも 1 でもなければ $1 \in t$ となります.

推移的閉包 $\mathrm{trcl}(x)$ の濃度は x を作るまでにどれくらい多くの集合が必要とされるかを数えていることになります．この数が有限になるような集合 x はとりわけ重要です.

補題 I.14.12 $x \in R(\omega)$ は，$x \in WF$ かつ $\mathrm{trcl}(x)$ が有限であることと同値.

【証明】 $\rightarrow$ について．$x \in R(\omega)$ であればある有限の n について $x \in R(n)$ である．$R(n)$ は推移的集合であるから $\mathrm{trcl}(x) \subseteq R(n)$ であり，また $R(n)$ がいずれも有限集合であることは n に関する帰納法でわかる.

$\leftarrow$ について．$n = \{\mathrm{rank}(z) : z \in \mathrm{trcl}(x)\}$ とおく．すると n は有限であって補題 I.14.11 から $n \in ON$ でもあるから $n \in \omega$ である．$z \in x$ なら $\mathrm{rank}(z) < n$ なので $x \subseteq R(n)$，したがって $x \in R(n+1)$ となる． □

この $\leftarrow$ において $x \in WF$ という前提を省くことはできません．ZFC^- においては $x = \{x\}$ であるような集合 x の存在も矛盾しないのですが，このような x については $x = \mathrm{trcl}(x)$ であって，これは有限なのに，$x \in x$ から $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(x)$ が導かれてしまうので $x \notin WF$ です．このセクションのはじめに指摘したとおり，基礎の公理からはいかなる集合も $x \in x$ をみたさないことが導かれます.

定義 I.14.13 $HF = R(\omega)$．これは**遺伝的有限集合**全体の集合と呼ばれる.

67 ページでやったように，$\in$ を有向グラフと考えて x の $\mathrm{trcl}(x)$ ともども図示してみれば，x は x の子供たちの集合であり，$\mathrm{trcl}(x)$ は x のすべての子孫の集合となります．これが「遺伝的有限」という名の由来です．

インフォーマルに言って，有限の対象だけを扱う数学はすべて HF の中でなされます．補題 I.14.6 から明白なように，$\emptyset$ と中カッコ $\{\cdots\}$ を用いる有限な表記で書き下せる集合はどれも HF に属します．これにはすべての有限順序数，そして，たとえば $m, n \in \omega$ のときの ${}^m n$ とか，そのほか有限組合せ論にあらわれるあらゆるものが含まれます．たとえば，すべての有限群は $n \in \omega$ かつ $\cdot \subseteq (n \times n) \times n$ であるような群 $\langle n, \cdot \rangle$ と同型になります．積 $\cdot$ は $n \times n$ から n への函数だからです．この $\langle n, \cdot \rangle$ のランクは有限で，実際それは $n + 6$ になります．

これと同様に，**すべての**数学は WF の中でなされます．たとえばすべての順序数は WF に属し，また，α と β が順序数であるときにはいつでも，${}^\alpha\beta \in WF$ となります．選択公理を用いるなら，あらゆる群はある基数 κ について $\langle \kappa, \cdot \rangle$ の形の群と同型になりますが，この $\langle \kappa, \cdot \rangle$ も WF に属します．同じ考えかたで，あらゆるタイプの代数的構造についてその同型なコピーが WF の中に作れます．また $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ のような具体的な対象も WF に属し，そのランクを求めることもできます（セクション I.15 参照）．このことから，なぜ基礎の公理すなわち $V = WF$ が集合論を用いた数学の展開に関連しないのかも説明がつきます．すべての数学が，どのみち WF の中でなされるのです．その数学に，はたして $V \setminus WF$ は空であろうか，という問いが関連してくるはずがありません．

この WF の理論はフォン・ノイマンによるものです．ここでインフォーマルに注意したことを，彼は基礎の公理の無矛盾性を（WF をモデルとして）示す定理に変えてもいます．彼が示したのは，もしも ZFC^- が無矛盾なら ZFC も無矛盾だ，ということです．なぜなら ZFC からの $\varphi \wedge \neg\varphi$ のどんな証明も，モデル WF において φ が真であり偽でもあると示すことで ZFC^- からの矛盾の証明へと翻訳できるからです．これについて詳しくは [36] とか [41] とかの集合論のテキストを見なさい．

演習問題 I.14.14　関係 $E \subseteq \omega \times \omega$ を $nEm \leftrightarrow 2 \nmid \lfloor m2^{-n} \rfloor$ によって定めよう．これは m の 2 進数展開の右から n 桁目が 1 である（たとえば 43 は 2

進数表記すれば 101011_b なので $0, 1, 3, 5$ の桁に 1 がある）というのと同値である．$(\omega; E) \cong (HF; \in)$ を証明しなさい．

［備考］ HF を ω 型に明示的に数えあげるこの方法は 1937 年にアッカーマンの [1] で発表されました．表 I.2 でもはじめの 16 個の集合が順にリストされています．$|HF| = \aleph_0$ であることは HF の定義から明らかなのですが，計算可能な全単射があるという事実が再帰理論において重要になってきます（セクション IV.3 参照）．というのも，そのおかげで HF 上の「決定可能」と ω 上の「決定可能」いう概念が同一視できるからです．

［ヒント］ 求める同型写像を $f\colon \omega \to HF$ として，これを再帰的に $f(m) = \{\, f(n) : nEm \,\}$ と定義する．演習問題 IV.3.17 では，f と f^{-1} が計算可能であることを証明しているから，そちらも参照しなさい．いくつか例をあげると

$$
\begin{aligned}
&f(0) = \emptyset = 0\\
&f(1) = \{\emptyset\} = 1\\
&f(2) = f(10_b) = \{1\}\\
&f(3) = f(11_b) = \{1, 0\} = 2\\
&f(5) = f(101_b) = \{\{1\}, 0\}\\
&f(43) = f(101011_b) = \{f(5), f(3), f(1), f(0)\} = \{\{\{1\}, 0\}, 2, 1, 0\}\\
&f(2^{65536}) = \{\{\{\{\{1\}\}\}\}\}\\
&f(123456789123456789)\\
&= \Big\{\{\{\{1\},0\},\{\{1\}\},2\},\{\{\{1\},0\},\{\{1\}\},\{1\},1,0\},\\
&\qquad \{\{\{1\},0\},\{\{1\}\},\{1\},0\},\{\{\{1\},0\},\{\{1\}\},\{1\}\},\\
&\qquad \{\{\{1\},0\},\{\{1\}\},1\},\{\{\{1\},0\},\{\{1\}\},0\},\{\{\{1\},0\},2,\{1\},1,0\},\\
&\qquad \{\{\{1\},0\},2,\{1\}\},\{\{\{1\},0\},2,1,0\},\{\{\{1\},0\},2,0\},\{\{\{1\},0\},2\},\\
&\qquad \{\{\{1\},0\},\{1\},1\},\{\{\{1\},0\},1,0\},\{\{\{1\},0\},0\},\{\{\{1\},0\}\},\\
&\qquad \{\{\{1\}\},2,\{1\},1,0\},\{\{\{1\}\},2,\{1\},0\},\{\{\{1\}\},2,1,0\},\\
&\qquad \{\{\{1\}\},2,1\},\{\{\{1\}\},\{1\},1,0\},\{\{\{1\}\},\{1\},1\},\{\{\{1\}\},\{1\}\},\\
&\qquad \{2,\{1\},1\},\{2,\{1\}\},3,\{2,1\},\{2,0\},\{2\},\{\{1\}\},\{1\},0\,\Big\}
\end{aligned}
$$

このように，f は $R(j+1)$ に進む前に $R(j)$ の全体をリストアップしてしま

おうとするので，数 n の大きさと $f(n)$ の表示の長さとの間に単純な関係はつかない．□

演習問題 I.14.15　K はどんな集合 y についても $y \subseteq K$ ならば $y \in K$ となるようなクラスだとする．このとき $WF \subseteq K$ となることを示しなさい．
[注意]　補題 I.14.6 により WF はこの性質をもつ．

演習問題 I.14.16　すべての順序数 ξ について $|R(\omega+\xi)| = \beth_\xi$ となることを（選択公理を用いて）示しなさい．$\beth_\xi$ の定義については I.13.15 を見なさい．したがって $\xi \geq \omega^2$ をみたす ξ については $|R(\xi)| = \beth_\xi$ となる．

演習問題 I.14.17　置換公理を強化した

$$\forall x \in A \exists y\, \varphi(x,y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B\, \varphi(x,y)$$

が成立することを ZF において証明しなさい．
[ヒント]　セクション I.2 で与えられた弱いほうの置換公理は "$\forall x \in A \exists ! y$" で始まっていた．つまり φ は函数を定めるものとされていた．そのほうがフレンケルの [26] での元の主張に近く，インフォーマルな動機づけもしやすい（37 ページ参照）．

強化された主張を ZF で証明するには，φ が与えられたとして，α が $\exists y \in R(\alpha)\varphi(x,y)$ をみたす最小の順序数だという式を $\widehat{\varphi}(x,\alpha)$ として，この $\widehat{\varphi}$ に弱いほう ("!" つき) の置換公理を適用しなさい．

ここでは基礎の公理が必要だ．$|y| = n+1$ であって y の $n+1$ 個の要素が $\in$ についてサイクルをなす（$x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x_0$）という式を $\varphi(n,y)$ としよう．$\forall n \in \omega \exists y\, \varphi(n,y)$ が成立している一方 $\forall n \in \omega \exists y \in B\, \varphi(n,y)$ をみたす B は存在しない，という事態は，ZFC^- とは矛盾しない．□

次の定義によって HF のある自然な一般化が得られます．

定義 I.14.18　無限基数 κ について $H(\kappa) = \{x : |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa\}$ とする．$H(\aleph_1)$ を**遺伝的可算集合**全体の集合といい，HC と書く．

ですから $HF = H(\aleph_0)$ ということになります．$H(\kappa)$ は集合であって真クラスではなく，その濃度を求めることも（選択公理を用いれば）簡単です．

演習問題 I.14.19　無限基数 κ について次のことを示しなさい.

（1） $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$，したがって $H(\kappa)$ は集合である.

（2） $|H(\kappa)| = 2^{<\kappa} = \sup\{ 2^\theta : \theta < \kappa \}$.

［ヒント］ (1) は補題 I.14.12 の $\leftarrow$ に類似．(2) について，$\alpha < \kappa$ なら $\mathcal{P}(\alpha) \subseteq H(\kappa)$ なので $\geq$ はやさしい．等号を示すためにまず問題を $\kappa = \theta^+$ の場合に帰着させる．そうすれば極限基数の場合は和集合を考えるだけでよい．そこで，証明しようとするのは $|H(\theta^+)| = 2^\theta$ である．$H(\theta^+) \subseteq R(\theta^+)$ であることを使って θ^+ 未満の α に関する帰納法で $|H(\theta^+) \cap R(\alpha)| \leq 2^\theta$ を示しなさい．後続型順序数の段階では $(2^\theta)^\theta = 2^\theta$ を用いればよい．□

そこで $|HC| = 2^{\aleph_0}$ です．しかし HC はどの $R(\alpha)$ とも一致しません．$\alpha \geq \omega + 2$ なら $|HC| < \beth_2 \leq |R(\alpha)|$ であり，また $\alpha < \omega_1$ であるかぎり $\alpha \in HC \setminus R(\alpha)$ ですから.

演習問題 I.14.20　κ が正則基数のときを考える．$y \subseteq H(\kappa)$ かつ $|y| < \kappa$ なら $y \in H(\kappa)$ であることを証明しなさい．$f\colon z \to H(\kappa)$ かつ $z \in H(\kappa)$ なら $f \in H(\kappa)$ であることを証明しなさい.

［ヒント］ 集合 y の場合については $\mathrm{trcl}(y) = y \cup \bigcup\{ \mathrm{trcl}(z) : z \in y \}$ であることに注意しよう．□

集合 $R(\alpha)$ と $H(\kappa)$ はいずれも公理的集合論の鍵となる重要なものです．その理由はこれらが *ZFC* より少しばかり弱い理論の自然なモデルをなすからです．このことを次の二つの演習問題が明らかにしてくれます．この二つの問題に読者はいますぐ取り組んでもよいのですが，モデル理論の初歩のいくらかの概念を用いながらあますところなく実行するのがより順当ではありますので，セクション II.17 でこれらを（補題 II.17.13 と II.17.15 として）もう一度述べることにします.

演習問題 I.14.21　すべての極限順序数 $\gamma > \omega$ について，$R(\gamma)$ が *ZC*（つまり *ZFC* 全体から置換公理を取り除いたもの）のモデルであることを証明しなさい．また $R(\omega + \omega)$ で成立しない置換公理の実例があることを示しなさい.

［ヒント］ 公理のうちいくつかは演習問題 I.2.1 の発想でたやすく検証できる．たとえば公理 4（対の公理）が $R(\gamma)$ において真であることを検証するに

は，単に $\forall x, y \in R(\gamma) \exists z \in R(\gamma)[x \in z \wedge y \in z]$ をチェックすればよい．γ が極限順序数なので補題 I.14.8 によって $\{x, y\} \in R(\gamma)$ となっていて，これが成立することは明らかだ．無限の公理や選択公理は定義された概念に言及しているが，そうした概念のモデル内での扱いについての一般的な方法論（セクション II.17 参照）をひとたび手に入れれば，これらの公理の処置も簡単になる．セクション I.2 で書いたとおり，こうした公理を $\in$ と $=$ だけを使って述べ直すことも，もちろん可能だが，そうするとどうしても主張が長くなって，モデルにおける真偽の評価はやっかいになる．素朴に考えるなら，無限の公理 $\exists x[\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x)]$ が $R(\gamma)$ において真であることは，$\gamma > \omega$ なのだから $x = \omega \in R(\gamma)$ とおいてしまえば明らかなのだが，函数 S についての主張を $\in$ と $=$ だけをめぐる長い主張に書きなおした結果が $R(\gamma)$ においてもつ意味が，われわれの思っているとおりの意味であることを検証しなければならない．これと同様，$R(\omega + \omega)$ において置換公理が破れるはずだというのも，素朴には「明らか」だ．そうでなければ $R(\omega + \omega)$ が ZFC 全体のモデルとなるはずで，ZFC は $\omega + \omega$ の存在を証明できるのに，$\omega + \omega \notin R(\omega + \omega)$ であって，このモデルにはそんな順序数は存在しないのだから．ただし，ここでも「$\omega + \omega$ が存在する」という主張を $\in$ と $=$ だけを用いたずっと長い主張に書きなおしたものが期待どおりの意味をもつことを検証しなければならない．　□

演習問題 I.14.22　すべての正則基数 $\kappa > \omega$ に対して，$H(\kappa)$ が ZFC の公理から冪集合の公理を除いた全部のモデルになることを証明しなさい．$H(\kappa)$ で冪集合の公理が成立することは κ が強到達不能基数であることと同値で，そのときには $H(\kappa) = R(\kappa)$ が成立することを示しなさい．さらに，HF すなわち $H(\omega)$ すなわち $R(\omega)$ が，無限の公理を除いた ZFC の残り全部のモデルであることと，無限の公理が HF で成立しないことを示しなさい．

[ヒント]　内包公理については $y \subseteq z \in H(\kappa) \to y \in H(\kappa)$ という事実を用いなさい．置換公理については演習問題 I.14.20 を用いなさい．　□

この二つの演習問題から始まる集合論のモデルをめぐる議論は，やがて CH をはじめとするいろいろな主張がそこで真であったり偽であったりす

る ZFC のモデルにまで続いてゆくのです（[36] や [41] を参照）．セクション II.17 と II.18 を含め，この主題について述べるさいには，基礎の公理 $V = WF$ がつねに仮定されています．それというのも，自然にあらわれるモデルがすべて結局は WF の中にあるため，定理 I.14.18 や補題 I.14.12 でやったようにいちいち明示的に WF に言及するよりは，$V = WF$ を仮定したほうが話が簡単になるのです．

モデル $H(\kappa)$ は再帰理論にも関連しています．古典再帰理論は，すべての有限的数学とともに HF 内に住み込んで，有限的な数学における概念のうち計算可能なのがどれで計算不可能なのはどれかを論じます．たとえば演習問題 I.14.14 のヒントで紹介した函数 $f\colon \omega \to HF$ は，わたくしがコンピュータのプログラムを用いて $f(123456789123456789)$ を求めたことからも明らかなとおり，計算可能です．ここで HF を他の推移的集合に置きかえて考えてみようというのは自然な発想です．たとえば，HC 上の再帰理論は，可算順序数に沿った計算は実行できても $\aleph_1$ 個以上のものを一度に見わたすことはできないような可算無限的存在者にとっての計算可能性の概念に対応するわけです．$|HC| = 2^{\aleph_0}$ なので HC から HC への函数は $2^{2^{\aleph_0}}$ 個あり，そのうちの $2^{\aleph_0}$ 個だけが，そうした可算無限的存在者にとって計算可能です．なぜなら計算可能な函数は可算なプログラムをもつはずで，そのようなプログラムは HC に属することになるからです．このことについては，セクション II.17 と IV.1 でさらにコメントしています．

セクション I.9 で ON 上の帰納法と再帰について論じました．基礎の公理を用いれば，V 全体にわたる帰納法と再帰が実行できます．定理 I.9.1 のアナロジーとしては次のことがいえます．

演習問題 I.14.23（V 上の超限帰納法）　どの論理式 $\psi(y)$ についても，もしも $\forall y[\forall x \in y \psi(x) \to \psi(y)]$ であれば $\forall y \psi(y)$ である．
［ヒント］ $\neg\psi(y)$ となる集合 y のうち最小ランクのものを考えると矛盾が出る．この証明はもちろん基礎の公理を用いている．このことは $\psi(y)$ として $y \in WF$ をとればわかる． □

定理 I.9.2 のアナロジーとしては

演習問題 I.14.24（V 上の超限再帰）　$\forall s \exists ! y \varphi(s, y)$ であったとして $\varphi(s, y)$

をみたす唯一の y を $G(s)$ と定義したとする．このとき論理式 ψ を次のことが証明可能になるように定められる：

（1） $\forall x \exists ! y \psi(x,y)$ である．したがって $\psi(x,y)$ をみたす唯一の y を $F(x)$ と定めることができる．

（2） $\forall x[\, F(x) = G(F\restriction \mathrm{trcl}(x))\,]$ である．

［ヒント］ つまり $F(x)$ を $\mathrm{trcl}(x)$ の要素に対する F の値を用いて計算するということになる．このことの正当性は定理 I.9.2 によって $F\restriction R(\xi)$ を再帰的に計算すればわかる．この問題も基礎の公理を用いていて，実際に基礎の公理と同値である．このことは，補題 I.14.6 から $\mathrm{rank}(x)$ を再帰的に $\mathrm{rank}(x) = \sup\{\, \mathrm{rank}(y) + 1 : y \in x\}$ と定められることによってわかる．とくにこの例では $\mathrm{rank}(x)$ の計算には $\mathrm{trcl}(x)$ のではなく x の要素のランクさえわかればよい． □

ここでの「計算する」はインフォーマルな表現にすぎませんが，V のかわりに HF を置いて，$F, G\colon HF \to HF$ とすれば，再帰理論で定められる専門的な意味において，G が計算可能であるかぎり F も計算可能になります．定理 IV.3.11 を見なさい．

I.15　実数と記号的存在

こうして集合 $\mathbb{N}$ すなわち ω が手に入ったからには，整数の全体 $\mathbb{Z}$，有理数の全体 $\mathbb{Q}$，実数の全体 $\mathbb{R}$，複素数の全体 $\mathbb{C}$ を普通どおりの集合論的な論法で構成できます．その展開のあらましをここで手短に述べて，基礎的な障害がなにもないことを見ましょう．ここではもっぱら ZF^- で考え，ときおり濃度をきちんと求めるために AC を用います．話を詳細にわたって展開しようとすれば，集合 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とともに，それぞれの加法・減法・乗法や（$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ については）大小関係も定義して，いろいろの代数的な法則も確認せねばなりませんから，それだけで一冊の本がまるごと必要になることでしょう．詳しくは，ランダウの [43] やモシュコヴァキスの [52] を見なさい．ある体の上の多項式のような記号的存在を集合論の枠組みの中でどう見るべきかについても，ここで説明しましょう．すべての構成は整礎的集合の範囲内で行なわれ，ランク（セクション I.14 参照）がどうなるのかも調べられま

す．とりわけ「本質的に有限」なオブジェクトはいずれも有限のランクをもち，そのため HF のメンバーになります．そうした「本質的に有限」なオブジェクトには，自然数，有理数，有理数体上の多項式，有限のブール表現など，コンピュータのプログラムに入力できる（実際入力している）種類のオブジェクトが含まれるのです．まず有理数から考えましょう．

インフォーマルには，ω に $2/3$ とか $-2/3$ とか -7 とかいったオブジェクトを添加すれば $\mathbb{Q}$ が得られます．ここでは，$-2/3$ の真の本質とは何ぞや，という哲学的問いに答える必要はなく，これをまったくの「記号的存在」であるとみてよいのです．集合論ではこれを次のようにあらわせます．

定義 I.15.1　$\mathbb{Q}$ とは，ω と次のような $\langle i, \langle m, n\rangle\rangle \in \omega \times (\omega \times \omega)$ 全体の集合との和集合である．

（1）$m, n \geq 1$.
（2）$i \in \{0, 1\}$.
（3）$\gcd(m, n) = 1$.
（4）$i = 0$ のときは $n \geq 2$ である．

また $\mathbb{Z} = \omega \cup \{\, \langle 1, \langle m, 1\rangle\rangle : 0 < m < \omega \,\}$ とする．

この定式化によれば，$2/3$ と $-2/3$ と -7 はそれぞれ $\langle 0, \langle 2, 3\rangle\rangle$ と $\langle 1, \langle 2, 3\rangle\rangle$ と $\langle 1, \langle 7, 1\rangle\rangle$ です．つまり，i は符号ビットで，0 のとき正，1 のとき負をあらわします．(3) によって同じ数が重複した表現をもつことを避け，(4) によってすでに ω に属している 7 をあらわす $\langle 0, \langle 7, 1\rangle\rangle$ などを除外しています．

演習問題 I.15.2　$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq HF$，$\mathrm{rank}(\mathbb{Z}) = \mathrm{rank}(\mathbb{Q}) = \omega$，そして 104 ページの図 I.2 にあるとおり $\mathrm{rank}(-2/3) = 7$ となる．

定義 I.15.3　$\mathbb{Q}$ 上に $+$ と $\cdot$ と $<$ を「よく知られたやり方」で定め，それによって $\mathbb{Q}$ を ω を含む順序体とする．

明らかに，この定義は細部をつめるためにもっと延長されねばなりません．順序体の公理は例 II.8.24 にリストされています．体の公理に加えて，いくつかの大小の順序についての公理，たとえば 2 つの正の数の和も積もまた正の数である，といった公理があります．

代数学的には，まず正負の整数からなる環 $\mathbb{Z}$ を定義するほうがエレガントでしょう．そうすると $\mathbb{Z}$ は整域となり，$\mathbb{Q}$ がその商体となります．このアプローチにおいては $\mathbb{Q}$ の個々の要素は整数のペアの同値類で，たとえば 2/3 とは可算無限集合 $\{\langle 2,3\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 6,9\rangle, \cdots\}$ のことになるでしょう．この定義は構成法が一般的であり，同値類から代表を選ぶ特別な仕掛けが不要なので，代数学ではこちらが好まれます．今回使った仕掛けは整数の場合にしか通用しないのです．ところがその一方で，代数学で好まれるこの定義では $\mathbb{Q}$ は HF には含まれないことになります．わたくしたちの定義 I.15.1 は，有理数をコンピュータのプログラムに入力するさいに用いるであろう有限の記号表現に近いものになっています．

有理数の全体 $\mathbb{Q}$ とその順序が与えられたとして，実数と複素数を次のように定めます．

定義 I.15.4　$\mathbb{R}$ とは $x \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ であって $x \neq \emptyset$，$x \neq \mathbb{Q}$，x は最大要素をもたず，さらに

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}[\, p < q \in x \to p \in x\,] \tag{$*$}$$

をみたすような x 全体の集合である．また $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ とする．

インフォーマルな話として，$x \in \mathbb{R}$ のときその**下方デデキント切断** C_x を $C_x = \{\, q \in \mathbb{Q} : q < x\,\}$ と定義でき，これが $(*)$ をみたす $\mathbb{Q}$ の部分集合になっています．フォーマルには，この C_x を x に同定して，$(*)$ をみたす集合すべてを集めたものを $\mathbb{R}$ と**定義して**しまいます．もちろん $\mathbb{R}$ 上の $+$ と $\cdot$ と $<$ もしかるべく定義する必要があります．そして，複素数は（$x+iy$ を意味する）実数の対 $\langle x, y\rangle$ です．

演習問題 I.15.5　各 $x \in \mathbb{R}$ について $\mathrm{rank}(x) = \omega$ であり，$\mathrm{rank}(\mathbb{R}) = \omega + 1$ である．$\mathrm{rank}(\mathbb{C}) = \omega + 3$ である．

実数や複素数は本質的に有限なオブジェクトではありませんし，HF が可算なのに $\mathbb{R}$ は可算でないのですから，$\mathbb{R} \subseteq HF$ となることはありえません．初等数学で出会う $\mathbb{R}$ とか $\mathbb{C}$ とか，あるいは $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度といった集合はすべて，ZC の自然なモデル（演習問題 I.14.21 と補題 II.17.13 を参照）である $R(\omega + \omega)$ に属します．

実数全体を構成するにもいろいろな方法があります．そうしたいろいろな方法がどれも同型の意味で同じ結果を生むのが大事なところで，そのおかげで数学者たちはどの特定の方法で構成したものかを言わずに「（あの）実数全体」について語れるのです．このことは次のように定式化できます．

定義 I.15.6　順序体 F が**デデキント完備**であるとは，それが最小上界の公理をみたすことをいう．すなわち部分集合 $X \subseteq F$ が空でなくて上に有界であるときには必ずその最小上界 $\sup X$ が存在するということである．

先ほど定義した $\mathbb{R}$ がデデキント完備な順序体であることを検証し，そのうえで次の命題を証明せねばなりません．

命題 I.15.7　デデキント完備な順序体はすべて互いに同型である．

初等解析の教科書がデデキント完備な順序体 $\mathbb{R}$ の存在を公理として前提し，もっと基本的な集合論的オブジェクトから $\mathbb{R}$ を構成することなしに済ませていることがあるのも，この命題のおかげです．

初等解析にあらわれる集合は可算であるかサイズ $2^{\aleph_0}$ か $2^{2^{\aleph_0}}$ をもちます．これらの濃度は基数の基本的な算術でたやすく求められます．

演習問題 I.15.8　$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ に属するすべての連続函数の集合を $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ とするとき，$|\mathbb{R}| = |C(\mathbb{R},\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ であり，いっぽう $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = 2^{2^{\aleph_0}}$ である．
[ヒント]　まず $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ を示すこと．$|C(\mathbb{R},\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ を示すには，$f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ のとき集合 $\{\, (p,q) \in \mathbb{Q}^2 : f(p) < q \,\}$ が f を決めてしまうことを利用しなさい．　□

演習問題 I.15.9　$\mathbb{R}$ には $2^{\aleph_0}$ 個のボレル部分集合と $2^{2^{\aleph_0}}$ 個のルベーグ可測部分集合とが存在する．
[ヒント]　ボレル集合族を $\mathcal{B}$ と書こう．この $\mathcal{B}$ を解析学の教科書でよくやるように開集合全体を含む σ-集合代数のうち最小のもの，と定義したのでは，$|\mathcal{B}|$ がどうなるのかはわからない．そのかわりに $\mathcal{B}$ がある超限的なプロセスから生みだされる $\mathcal{B}_{\omega_1}$ に一致することを示しなさい．まず $\mathcal{B}_0$ は開または閉であるような集合全体の族，$\mathcal{B}_{\alpha+1}$ は $\mathcal{B}_\alpha$ に属する可算個の集合の和集合や共通部分の全体とし，極限順序数 γ に対しては，$\mathcal{B}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{B}_\alpha$ としなさ

い．このとき α に関する帰納法で $|\mathcal{B}_\alpha| = 2^{\aleph_0}$ となることを示しなさい．□

一般に，$2^{\aleph_0}$ 個以下の集合から生成された σ-集合代数の濃度は $2^{\aleph_0}$ 以下となります．より深い事実として，$\mathbb{R}$ のボレル部分集合はいずれも可算またはサイズ $2^{\aleph_0}$ をもちます．このことは 1915 年ごろにハウスドルフとアレクサンドロフにより（独立に）証明されました．彼らがはっきりと認識していたとおり，初等解析からは連続体仮説（*CH*）への反例が得られないわけです．詳しくは記述集合論のテキスト [38] や [51] を見なさい．

続く三つの演習問題も，集合論が解析学で用いられた例で，いずれも 20 世紀の早い時期に得られた結果です．

演習問題 I.15.10　ルジン集合とは $\mathbb{R}$ の部分集合 X で，X 自身は可算でないが，すべての第一類集合 $B \subseteq \mathbb{R}$ について $X \cap B$ が可算になるようなもののことである．*CH* を仮定してルジン集合が存在することを証明しなさい．また，ルジン集合のルベーグ測度がゼロであることを *ZFC* で証明しなさい．

[ヒント]　第一類集合は，定義により，内点をもたない閉集合の可算個の和集合の部分集合になっている．そこで B_α, $\alpha < \omega_1$ がそういう和集合すべてのリストだったとして，$x_\alpha \in \mathbb{R}$ を $x_\alpha \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi$ となるように選びなさい．□

演習問題 I.15.11　シルピンスキ集合とは $\mathbb{R}$ の部分集合 X で，X 自身は可算でないが，すべてのルベーグ測度ゼロの集合 $B \subseteq \mathbb{R}$ について $X \cap B$ が可算になるようなもののことである．*CH* を仮定してシルピンスキ集合が存在することを証明しなさい．また，シルピンスキ集合がルベーグ可測でありえないことを証明しなさい．

いっぽう $ZFC + \neg CH$ においては，ルジン集合あるいはシルピンスキ集合が存在したり存在しなかったりする 4 とおりの可能性が，いずれも無矛盾です．

演習問題 I.15.12　ベルンシュタイン集合とは，$\mathbb{R}$ の部分集合 X で，X 自身も $\mathbb{R} \setminus X$ もすべての完全集合〔訳注：完全集合とは，$\mathbb{R}$ の部分集合のうち，

孤立点をもたない閉集合のこと〕と交わるようなもののことである．ZFC においてベルンシュタイン集合が存在することを証明しなさい．また，ベルンシュタイン集合はルベーグ可測でないことを証明しなさい．

[ヒント]　完全集合は全部で $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 個あり，そのひとつひとつがサイズ $\mathfrak{c}$ をもつ．すべての完全集合を $\{ B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \}$ とリストし，実数全体を $\{ a_\xi : \xi < \mathfrak{c} \}$ とリストしたとしよう．これらを用いて，X が $\{ x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \}$，$\mathbb{R} \setminus X$ が $\{ y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \}$ になるようにする．第 α 段階では x_α と y_α をどうするか決める．すべての a_ξ を使い切ることと，どの x_α もどの y_β とも一致しないことを保証せねばならない．　□

連続体（continuum）に由来する記号 $\mathfrak{c}$ は集合論で $2^{\aleph_0}$ をあらわす標準的な略記法です．

この章の最後に，公理的集合論の枠内で記号表現をどう扱うべきものか検討します．そうした表現は数学において，とりわけ代数学やロジックにおいて，頻繁に現われます．

代数学で扱う多項式を考えましょう．多項式を函数でなく記号表現とみなすことが大切です．たとえば K を体とするとき，多項式 $x^2 + y^4$ と $x^4 + y^2$ とは K 上の異なる多項式をいつでもあらわしますが，それらに対応する函数は K が 2 つあるいは 3 つの要素からなる体のときは同じ函数になってしまいます．

代数学からのもう一つの例．群論で 2 個の生成元の上の自由群 F を記述しようとするときは，2 つの文字，たとえば x と y から作られる語全体の集合を用います．語というのはたとえば $xxxy^{-1}x^{-1}x^{-1}$ というものです．こうした語が（あるいは定義のしかたによっては語の同値類が）F の元になります．

この二つの例において，記号 x と y は何者なのでしょうか．ここまでの ZFC の展開の中で，わたくしたちは「記号」と呼ばれる存在にまだ出会ってはいません．上の二つの例は，次に述べるロジックからの例と同様に扱えばよくて，ロジックのほうがこの本の主題との関連が深いので，そちらをもう少しつっこんで議論することにします．

たとえば命題論理と真理値表について論じたかったとしましょう．このときの議論の対象は $\neg[p \wedge q]$ のようなブール表現というわけです．この表現を σ と呼びましょう．これは 6 つの記号の列です．列についてはすでに論じて

あります（定義 I.9.3 を見なさい）．σ は順序数 $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ を定義域とする函数で，$\sigma(0)$ が記号 “$\neg$”，$\sigma(1)$ が記号 “[”，$\sigma(2)$ が記号 “p” 等々となっているものと考えればよいのですが，さてしかし**記号とはいったい何者でしょうか**．ヒトであれば記号 “$\neg$” を視覚の力を借りてその形から識別することでしょう．しかしブール表現をめぐる数学が視覚の心理学とか “$\neg$” というオブジェクトを現実に作りあげているものに依存するわけにはいきません．このオブジェクトがきちんと定義されていさえすればよいのです．ZF で考えているときは集合だけが存在するとしているので，“$\neg$” とはある特定の集合のことだとせねばなりません．話を決めるために，この記号はなんらかの自然数だと思うことにします．すべての記号を自然数あるいは他の HF の要素であらわすと決めてしまうと，わたくしたちの扱う構文論的オブジェクトはすべて HF の中にあることになって，有限の数学のすべては HF でなされるというわたくしたちの期待に添うかたちになります．

定義 I.15.13　P_n を数 $2n+2$ のことだとする．記号], [, $\neg$, $\vee$, $\wedge$ はそれぞれ数 1,3,5,7,9 の言いかえだとする．

ここでのこの定義に限っていえば $P_0, P_1, \cdots$ とは命題をあらわす文字すなわちブール値変数と考えています．$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{\, 2n+2 : n \in \omega\}$ とおきましょう．この集合 A がアルファベット（文字の集合）で，これはすべての命題変数と，その他の 5 つの「記号」すなわち] と [と $\neg$ と $\wedge$ と $\vee$ からなります．

フォーマルな言語の理論においては文字列（記号の並び）とその連結操作を論じる必要があります．これらは定義 I.10.3 と I.10.4 で定められました．

演習問題 I.15.14　$HF^{<\omega} \subseteq HF$.

[ヒント]　演習問題 I.14.20 を見なさい．　□

ここで正の整数を記号として用いたことに本質的な意味はありません．記号が記号列でもあるというようなことのないよう，$A \cap A^{<\omega} = \emptyset$ であるとするのは有用です．正の整数についてはこれが成立します．0 すなわち $\emptyset$ はまた空な列でもあるので，わたくしたちはこれを記号として用いることを避けたのです．

演習問題 I.15.15　$A \subseteq \omega \setminus \{0\}$ をみたすどんな集合 A も $A \cap A^{<\omega} = \emptyset$ をみたす．

たとえば $\varphi := \neg[P_2 \wedge P_3]$ は実は列 $\varphi = (5, 3, 6, 9, 8, 1)$ のことです．また，ψ を $[P_1 \wedge P_3]$ としましょう．これは実は列 $(3, 4, 9, 8, 1)$ のことです．すると $[\psi \wedge \varphi]$ は記号 [と記号列 ψ と記号 $\wedge$ と記号列 φ と記号] を連結させたもので，列 $(3, 3, 4, 9, 8, 1, 9, 5, 3, 6, 9, 8, 1, 1)$ もしくは $[[P_1 \wedge P_3] \wedge \neg[P_2 \wedge P_3]]$ ということになります．

記号列の連結の記法 $[\psi \wedge \varphi]$ は次の定義の一例です．定義 I.10.4 で与えた「生の」記法より，こちらのほうが便利です．

定義 I.15.16　$A \cap A^{<\omega} = \emptyset$ であると仮定し，$\tau_0, \cdots, \tau_{m-1} \in A \cup A^{<\omega}$ とする．$\tau_i \in A^{<\omega}$ のときは τ_i を σ_i とし，$\tau_i \in A$ のときは長さ 1 の列 (τ_i) を σ_i とする．このとき $\tau_0 \cdots \tau_{m-1}$ は列 $\sigma_0 {}^\frown \cdots {}^\frown \sigma_{m-1} \in A^{<\omega}$ をあらわす．

これはフォーマルな論理学の始まりにすぎません．次は $A^{<\omega}$ の要素のうちどれとどれが形の整ったブール表現であるのかきちんと定義しなければなりません．この形の整ったブール表現の全体が**フォーマルな言語**を形成します．フォーマルな言語とは，数学的に厳密な構文規則に則って人工的に定められた言語のことです．さらに「真理値表」とか「トートロジー」といった概念も定義する必要があります．たとえば先ほど例にあげた $\psi \wedge \varphi$ は $[[P_1 \wedge P_2] \wedge \neg P_3]$ と同値です．この二つの式の真理値表が一致するからです．それから命題論理を述語論理へ拡張する必要もあります．述語論理はブール演算のほかに変数と量化記号を含みます．*ZFC* の公理も述語論理で記されます．これについて詳しいことは第 II 章を見なさい．

ここまでのフォーマルな言語の理論で，] と [を使ってもっと普通の) と (を使わなかったのは，数列を書くときに用いる) と (との混同を避ける用心のためです．数学でたいていそうするように，この本の他の部分では，もっとインフォーマルに $[\cdots]$ と $(\cdots)$ とを式のカッコ入れに同じようなものとして用います．

フォーマルな言語についてどのような議論をするにせよ，その言語の記号と**メタ変数**を区別せねばなりません．たとえば

$$[p \vee \neg p] \tag{1}$$

がトートロジーだ，などと言うことがあります．ここで [と ∨ と ¬ と] の 4 つの記号はわたくしたちのフォーマルな言語に含まれる特定の記号 3 と 7 と 5 と 1 です．ところが p はメタ変数です．これはなんら特定の命題変数をあらわしているわけではありません．(1) がトートロジーだというのは，すべての $n \in \omega$ について $[P_n \vee \neg P_n]$ がトートロジーだということを簡潔に言うための便法にすぎません．簡潔さもさることながら，この語法によって，言わんとするところが読みとりやすくもなります．わたくしたちの命題変数 P_n が「正式には」数 $2n+2$ であるという定義はこの本でもこのセクションにしか出てきませんし，他の本では他の規約を用いているので，読者はこれをすっかり忘れてしまうかもしれませんが，それでも (1) は誰にでもわかるのです．

このメタ変数という概念はコンピュータのプログラミング言語の議論でもおなじみです．たとえば id_1 と id_2 が識別子（identifier）として有効であれば

$$id_1 = \texttt{sqrt}\ (\ id_2\ )\ ; \tag{2}$$

は C や C++や Java の代入文となる，などと言うことがあります．ここで "= `sqrt` (" の部分と ");" の部分はフォーマルな言語の部分です．ですからプログラムにはこのとおりに打ち込まねばなりません．いっぽう，id_1 と id_2 とはメタ変数です．

モデル理論においては不可算個の記号をもつ言語を調べる必要に迫られることもしばしばあります．不可算個のブール値変数を使いたいと思うこともありえます．そんなときには P_α として順序数 $2 \cdot \alpha + 2$ を用いればよいのです．ただ，そうするとすべてのブール表現が HF の中にあるというわけには当然いかなくなります．

この先で見ていくとおり，モデル理論のある部分はたいそう集合論的で，この章の内容を頻繁に用いることになります．しかし，基本的な困難はもうありません．ZF の中で記号的存在をどのように扱うかは説明しましたし，モデル理論の残りの部分は「通常の数学的議論」によって展開されます．そして，そのような議論が ZFC の中で定式化できることは明白です．

第 II 章
モデル理論と証明論

II.1　方針

この本で扱う初歩的レベルでは，モデルの理論と証明論のつながりはたいそう密接ですので，この両者を一緒に扱うことにします．もっと進んだ内容については手短に言及するに留めますが，そこでは両分野は分かれて広がっています．

II.2　証明論への史的導入

この話題については文献 [22] や [27] にもっとずっと深い議論がありますので，詳しくはそちらを参照してください．

数学やその他の科学を理性的に吟味しようと人々が意識しはじめるとすぐに，正当な論理的な議論を構成するものが何であるかと問いたずねるのが自然のなりゆきとなりました．このことを初めて詳細に探求したのは，わたくしたちの知る限り，アリストテレス（前 384〜前 322）でした．『分析論前書』[3] において彼は，たとえば

もしも

すべての馬が動物である	(every horse is an animal)
すべての動物が死すべきものである	(every animal is mortal)

ならば

すべての馬が死すべきものである	(every horse is mortal)

などのような，三段論法のいろいろな形を記述しています．現代の論理学であればこの論法を

$$\forall x(H(x) \to A(x)), \forall x(A(x) \to M(x)) \vdash \forall x(H(x) \to M(x))$$

と書くところです．セクション 0.4 でも言ったとおり，この改札ゲートのような記号 “$\vdash$” は，「証明する」と読むのです．

アリストテレスはユークリッドより少しだけ前の時代の人ですが，ユードクソスや他の人々が研究していた幾何学の公理論的基礎づけのことも知っていました．ただし，アリストテレスの焦点は数学における推論ではなく，推理一般の分析にありました．これは実のところもっとずっと込み入った課題です．

中世のスコラ哲学者たちが，アリストテレスの課題を引き継ぎました．[22] の第 2 巻をごらんなさい．ここでも，関心は数学の基礎ではなく推理の分析にありました．14 世紀のウィリアム・オッカムは『論理学大全』[53] において，論理について当時知られていたことを 850 ページにわたってまとめあげています．抽象的な「モデル」の概念こそなかったものの，この章で扱う題材の多くがこのオッカムの作品にその起源をもつと見ることもできます．スコラ哲学者たちの知識には，ブール値の論理あるいは命題論理のいたって詳細な分析が含まれていたのです．たとえば，選言の否定はその選言の各部の否定の連言であることがオッカムによって（同書第 II 部第 33 章において）指摘されています．これをわたくしたちは $\neg(p \vee q)$ と $\neg p \wedge \neg q$ が論理的に同値であるというド・モルガンの法則として知っています．この法則の双対となる $\neg(p \wedge q)$ と $\neg p \vee \neg q$ の同値性のほうは第 II 部第 32 章にあります．こうした問題がすべて記号ではなく言葉（ラテン語）で論じられていました．オッカムのこの本がわたくしたちのこの章よりずっと長くなった理由もそれで説明がつくかもしれません．フォーマルな言語の分析と比較すると，自然言語（ラテン語，英語などなど）の分析はもっとずっと込み入っているのです．たとえばオッカムの第 II 部第 15 章では関係代名詞の引き起こしうる曖昧さを扱っています．オッカムの用いた例そのものでは無論ありませんが，「機械にすぎないロボットに独創性はない」（“Robots, who are only machines, lacks originality.” $\forall x[R(x) \to M(x) \wedge L(x)]$）と「既婚のロボットは長生きする」（“Robots who are married live long lives.” $\forall x[R(x) \wedge M(x) \to$

$L(x)]$）を考えてごらんなさい．英語の書き言葉では，ラテン語と違って，コンマの適切な使用でこの曖昧さを回避できますが，英語の話し言葉にはやはりこの問題が残ります．第 II 部第 14 章では，キメラとか真空とか無限といった，神話的なあるいは無意味な概念を含む文を適切に解釈することについて論じています．みなさんが自然言語処理のコンピュータ・プログラムの設計をなさるときにはこうした問題は大変に重要です．しかしこれは，こんにちわたくしたちが論理と呼んでいるものの範囲には含まれません．

こんにちの記号論理の記法のおかげで，真に論理的な問題が，自然言語に関する問題から分離されます．ブール値論理の記号は 1850 年前後にブールの『思考の法則』[7] で初めて導入されました．ブールの発想はまったく近代的なものでしたが，その記号は現行のものとは少々異なっていて，ド・モルガンの法則はブールの記号では $1-(p+q)=\bar{p}\bar{q}$ および $1-pq=\bar{p}+\bar{q}$ となるところです．フレーゲの『概念記法』（1879 年）は，ある種の述語論理のあますところのない記述なのですが，これも現行の記号論理の構文とは違う書き方をしています．

数学において論理の重要度が増したのはカントール以降のことです．それ以前には，厳密さの欠けているところでも物理学的な直観を手引きとすればよいから，論理や演繹についての疑問は哲学の関心事にすぎない，という態度をとっていられたのです．実際，微積分学は 17 世紀に誕生して以来，19 世紀にそれが厳密に基礎づけされる前にも 200 年ほどにわたってそのようにして発展し，物理学に応用されてきたのでした．ところがカントールの集合論によって物理的現実から遠く切り離された数学の諸分野が生まれてくると，正しい数学と認められるべきものが何であるのかを正確に言うことは，より重要になってきたのでした．

現在のところ，数学とは何にせよ ZFC から証明できるもののことだとするのが慣例となっています．第 I 章で ZFC の公理を与えました．そのさい，（セクション I.2 で）フォーマルな論理の記法で公理を書いたものの，証明はいずれも日常言語でインフォーマルに与えられました．セクション 0.4 で述べたとおり，数学の基礎をめぐる議論を完成させるには，証明とは何かということをきちんと定義せねばなりません．この第 II 章でそれをやりましょう．それから，Σ からの φ のフォーマルな証明が存在することを意味

する $\Sigma \vdash \varphi$（セクション II.10 参照）を定義します．

もちろん，ただ $\vdash$ の定義を書いてみました，で終わってはいけません．その $\vdash$ が証明可能性という概念に期待される性質を本当にもっていることを確かめねばならないでしょう．この方向での主要な結果がセクション 0.4 で言及した完全性定理です．セクション II.12 でこれを証明します．

証明論へのアプローチにもいろいろのやり方があり，$\vdash$ の定義として何を用いるべきかは，みなさんが何のために証明論を学ぼうとするかによって違ってくるでしょう．考えられる目的を三つだけ挙げます．このうち前二つについては，この本では周辺的にしか扱いません．セクション II.19 を見てください．

第 1 の目的　インフォーマルな数学をフォーマルな体系にたやすく翻訳できること．ある意味ではこの目標設定はアリストテレスに通じるものです．というのも彼は自分の分析があらゆる論証を含むことを望んだからです．こんにちではフォーマルな証明をコンピュータに入力できるおかげでこのトピックに関心が寄せられています．Isabelle/ZF [35] や Mizar [47] はある種の公理的集合論にもとづいて動作し，ユーザがこれに定理とその証明を入力すれば，証明が正しいかどうかを検証してくれるのです．どちらのシステムも抽象数学の少なからぬ範囲をすでに検証し終えています．また，ACL2 [2] や Coq [18] のように，有限オブジェクトについての定理の検証のために最適化されたシステムもあります．

第 2 の目的　コンピュータに定理のフォーマルな証明を**発見**させること．システムが高能率の探索に向けて最適化されている必要がある点で，これは第 1 の目的とは違ったものになります．マックーンの Prover9 システム [49] が，この分野の最先端を行っていると広く認められています．このシステムがどのように働くか，その一例をセクション II.19 で見てください．

第 3 の目的　フォーマルな体系の**理論**の展開を容易にすること．この理論は基本的な定義や完全性定理（II.12.1）を含むものになります．この目標はヒルベルト流の証明論（セクション II.10 参照）を用いることでまことに首尾よく達成されます．ヒルベルト流の体系では $\vdash$ の定義がとんでもなくシンプルなおかげで，証明可能性の概念をめぐる定理を示すことも容易なので

す．数学における言語の使用と推論のすべてが，少数のいたってシンプルな要素に還元されてしまうことは，哲学的な関心をそそることでもあります．このとんでもないシンプルさのせいで，数学的に興味深い命題の証明を実際に書き下すことはたいへんに困難ですので，第 1，第 2 の目的のためには，わたくしたちの $\vdash$ は使い物になりません．

II.3　モデル理論への非-史的導入

このセクションではモデル理論の生まれてきた歴史的経緯ではなく，現行の見方の概略を述べます．

第 I 章のやり方で進み続けるとすれば，ZFC の中で代数や解析など数学の諸分野を展開することになるでしょう．とくに，さまざまな数学的構造，たとえば

（1） 群
（2） 環
（3） 体
（4） 順序体
（5） 全順序集合
（6） 整列集合
（7） デデキント完備順序体
（8） 巡回群

などのクラスを定義することが有用だとわかるでしょう．

それらのクラスはいずれも同型のもとで閉じています．整列順序と同型な二項関係はそれ自身が整列順序ですし，巡回群と同型な群はそれ自身が巡回群です．

さらに，これらのクラスのうちのいくつかは**1 階のクラス**であることがわかります．これは，構造の要素だけに対する量化を用いてそのクラスが定義できる，という意味です．**群** $(G; \cdot)$ はセクション 0.4 で示した公理 γ_1 と γ_2 を満さねばならないわけですが，この二つの公理はいずれも G の要素だけについて語っています．たとえば γ_1 なら $\forall x, y, z[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$ で，ここでの $\forall x, y, z$ は「G のすべての要素 x, y, z について」という意味でした．全順序 $(A; <)$ も同様で，定義 I.7.2 にあげた性質を満たさねばな

りませんが，それらはすべて A の要素にだけ言及するものです．たとえば $<$ の推移律は $\forall x, y, z[x < y \land y < z \to x < z]$ とあらわされ，これは A に**属する**すべての x, y, z について，という意味でした．このあとすぐにこの「1 階」という概念を明確にしますが，粗く言うと，1 階のクラスとは通常の 1 階論理であらわされた公理の集合 Σ のモデル全体のクラスということになります．1 階論理についてはインフォーマルにセクション 0.2 で論じ，セクション I.2 で ZFC の公理を述べるのに使いました．こうして，(1) (2) (3) (4) (5) のクラスは 1 階のクラスであることがわかります．

いっぽう (6) (7) (8) のクラスは 1 階のクラスではありません．整列順序の概念を定義するさいには，すべての空でない**部分集合**が最小要素をもつと言わねばなりません．また，デデキント完備性の定義（I.15.6）でもすべての上に有界な**部分集合**が最小上界をもつと言わねばなりません．ここでは定義が構造の要素ばかりでなく構造の部分集合についても語っています．また (8) において，「巡回群」であることの自然な定義は，それが 1 個の要素で生成されていることですから，$\exists x \in G \forall y \in G \exists n \in \mathbb{Z}[\, y = x^n \,]$ と書けるでしょうが，この定義は G とは別に集合 $\mathbb{Z}$ に言及しているため 1 階の定義とはいえないのです．

もちろんこの説明では (6) (7) (8) の**標準的な**定義がいずれも 1 階でないと言っているだけなので，ひょっとして誰かが同値な 1 階の定義を見つけるかもしれないとも言えるでしょう．しかし，実際にそうならないことは，このあとすぐにわかります．

ここで言っている 1 階のクラスかそうでないかの区別は重要なところで，決して単なる物珍しさで言っているのではありません．というのも，モデル理論の基本諸定理はいずれも 1 階のクラスだけに適用されるものだからです．それらの定理は，対象になるのが 1 階のクラスだけなので，数学において自然に現れる構造のクラスすべてに適用できるわけではありませんが，しかし多くのクラスを扱える強力なツールになります．

そうした基本定理の一つにレーヴェンハイム-スコーレム定理（II.7.17）があります．これは集合 Σ が無限モデルを一つでももつならあらゆる無限濃度のモデルをもつと主張するものです．この定理によれば (8) のクラスは 1 階のクラスではありません．無限巡回群はすべて $\mathbb{Z}$ と同型な可算なものば

かりだからです．同様に，どのデデキント完備順序体も（命題 I.15.7 によって $\mathbb{R}$ と同型であって）サイズ $2^{\aleph_0}$ となるので，(7)のクラスも 1 階のクラスではありません．

あらゆる濃度の整列順序が存在するとはいえ，(6)のクラスもやはり 1 階のクラスではないのです．このことを見るために，1 階論理の文の集合 Σ を，$(A; <)$ が Σ のモデルであることと整列順序であることとが同値になるようにとれたと仮定しましょう．この Σ にもう一つの 1 階の公理

$$\forall x(\neg\exists y(y < x) \vee \exists y(y < x \wedge \neg\exists z(y < z < x)))$$

をつけ加えた集合を Σ^+ とします．つけ加えた公理は，どの要素 $x \in A$ も，最小要素であるか，さもなければ直前要素をもつ，と言っています．このことは順序型 ω 以下の整列順序については真ですが，ω より大きい順序型の整列順序についてはそうではありません．ですから Σ^+ は可算無限モデルをもつのに不可算モデルをもたないことになり，レーヴェンハイム-スコーレム定理に矛盾することになります．

この本や [13] とか [46] などの基本テキストで述べられる初等モデル理論は，1 階の理論のモデルの数学的構造を研究するものです．ただし，そうした構造的な性質自身は 1 階の性質でないのが普通です．モデルの構造の最も基本的な性質といえばその濃度で，それこそがレーヴェンハイム-スコーレム定理の問題とするところですが，この定理の言うところによれば，モデルの濃度は 1 階の性質ではないわけです．その他の諸定理により，モデルの構造についてのより精巧な記述が得られるのですが，そうした定理を証明するに先立って，一度立ち止まり，フォーマルな言語の性質から始めてものごとをもっと厳密に進められるようにしましょう．

II.4 ポーランド記法

セクション II.2 で証明の理論の目的について論じたことを思い出してください．普段の数学で用いられる構文はいたって複雑なものです．コンピュータのプログラムに定理やその証明を打ち込むことを目指すなら，フォーマルな言語がこの複雑さを多少なりとも引き受けられるようでなければなりません．そうしなければ，実用上使い物にならないシステムができあがってしまいます．とすると，そのフォーマルな論理の構文もそれ相応に複雑なものに

なり，C とか Java とか Python といったプログラミング言語の構文に似たものになっていくでしょう．そうなれば構文の定義を書き下すのも長い作業になりますし，論理についての自明でない定理が証明できるまでの道のりはさらに長くなることでしょう．それでも，どのフォーマルな言語を用いるにせよ，現時点でインフォーマルな数学の言葉づかいのすべてを把握できるフォーマルな言語はありませんので，普段の数学の用語をフォーマルな言語に翻訳する方法を経験から学ぶ必要に迫られることになります．

本書ではこれとは正反対のやり方をします．わたくしたちは数学の標準的な用法から出発して，表現力を損なわない範囲内でそれをできる限り単純化していきます．この方法でのフォーマルな記法はたいていの数学者の目には醜悪に映ることでしょうが，その代わりに，フォーマルな論理**についての**基本的な事項の証明が実に短くて済むようになります．

一つの例として，1 変数あるいは 2 変数の函数のいろいろな表記法を見てみましょう．函数記号が変数の前にくる**前置記法**（$f(x)$ や $f(x,y)$ など）と後にくる**後置記法**（$x!$ など）と変数の間にくる**中置記法**（$x+y$ や $x \cdot y$ など）があります．函数記号が書かれなかったり文脈から読み取られる場合もあります．たとえば横にならべて xy と書けば $x \cdot y$ を意味し，斜めに x^y と書けば指数演算をあらわします．数学の文を理解するには，このほかに，たとえば $x+yz$ とは $x+(y \cdot z)$ のことであって $(x+y) \cdot z$ のことではない，というような，演算の優先順位についての標準的な決まり事を知っておかねばなりません．

ポーランド記法は 1920 年代にヤン・ウカシェヴィツによって考案されたもので，すべてを一貫して前置記法で書くものです．たとえば $x+y$ は $+xy$ となり $x+y \cdot z$ は $+x \cdot yz$ となり $(x+y) \cdot z$ は $\cdot +xyz$ となります．この方法だとカッコを用いずとも，また演算の優先順位を知らずとも，式の意味が曖昧にならないことがわかります（あとの補題 II.4.3 参照）．ただしその代わりに各記号の**アリティ**を知っておく必要があります．たとえば $+$ や $\cdot$ などの二項（bin<u>ary</u>）演算記号のアリティは 2 で，そのことはこれらの演算記号が 2 つの式に対して適用されることを意味します．階乗の記号！は単項（un<u>ary</u>）でアリティ 1 です．記号 x, y, z のアリティは 0 です．一般に，記号の集合と，各記号ごとのアリティが定まっていたら，これらの記号のポー

ランド記法による式を形づくることができ，その構文に曖昧さのないことが証明できるのです．ポーランド記法の定義は次のとおりです．

定義 II.4.1　ポーランド記法における**語彙**とは対 $(\mathcal{W}, \alpha)$ であり，この $\mathcal{W}$ は記号の集合，また α は函数 $\alpha\colon \mathcal{W} \to \omega$ である．$\mathcal{W}_n = \{ s \in \mathcal{W} : \alpha(s) = n \}$ とし，$\mathcal{W}_n$ に属する記号はアリティ n をもつということにする．定義 I.10.3 で定めたとおり $\mathcal{W}^{<\omega}$ は $\mathcal{W}$ に属する記号からなる有限列の全体であるものとする．そのような列のうち $(\mathcal{W}, \alpha)$ の**式**（または**整形式**ともいう）とは，

$$s \in \mathcal{W}_n \text{ であり各 } i < n \text{ について } \tau_i \text{ が式であるとき，} \\ s\tau_0 \cdots \tau_{n-1} \text{ も式である} \qquad (\star)$$

なる規則に則って構成されたもののことをいう．

一般的な用例においては，たいていの $\mathcal{W}_n$ は空です．一例として，$\mathcal{W} = \{ x, y, z, !, +, \cdot \}$ において $\mathcal{W}_0 = \{ x, y, z \}$，$\mathcal{W}_1 = \{ ! \}$，$\mathcal{W}_2 = \{ +, \cdot \}$ とし，これ以外の $\mathcal{W}_n$ は空であるとしましょう．すると次の 9 つの記号列はいずれもこの語彙の式になります．

$$x \quad y \quad z \quad +xy \quad \cdot yz \quad +xx \quad +x \cdot yz \quad \cdot +xyz \quad ! \cdot +xyz \qquad (✌)$$

このうちはじめの三つについて，$n = 0$ の場合，$(\star)$ は $\mathcal{W}_0$ のどの要素もそれだけで一つの式をなすと言っていることがわかります．またこの定義によれば空な列が式でないこともわかります．

記法 II.4.2　$\mathcal{W}^{<\omega}$ の要素 τ について $|\tau|$ と $\mathrm{lh}(\tau)$ はいずれも $\mathrm{dom}(\tau)$ と同じで，列 τ の長さをあらわす．$j \le |\tau|$ のとき，$\tau{\restriction}j$ とは τ のはじめの j 個の項からなる列である．

たとえば τ が $! \cdot +xyz$ であれば $|\tau| = 6$ であって，$\tau{\restriction}4$ は $! \cdot +x$ です．τ は $\mathcal{W}^6$ の要素なので函数であって，6 個の順序対のなす集合ですし，$\tau{\restriction}\{0, 1, 2, 3\}$ は函数 τ の集合 4 への制限そのものです．ですから，これらの記法は実のところ通常の集合論的な記法にすぎません．

セクション I.15 でコメントしたことに従って，定義 II.4.1 が *ZFC* の中でもつフォーマルな意味について考察しましょう．そこでは他の一切のものと同様，記号も集合です．セクション I.15 と同じく $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{<\omega} = \emptyset$ と仮定

しており，規則 (☆) で用いた連結操作の用語と記法も定義 I.15.16 で定めたものです．また，記号 $x \in \mathcal{W}_n$ と，(✌) の最初の項目として出てきた，x のみからなる長さ 1 の列とを区別する必要があります．後者については集合論的には $(x) = \{\langle 0, x\rangle\} \in \mathcal{W}^1 = \mathcal{W}^{\{0\}}$ となります．また規則 (☆) は「式」の概念の再帰的な定義ですが，このような再帰はセクション I.9 では表立って論じられませんでした．定理 I.9.2 を用いてこの定義の正当性を立証するには，長さ n 以下の式全体の集合が $F(n)$ となるように函数 $F\colon \omega \to \mathcal{P}(\mathcal{W}^{<\omega})$ を再帰的に定義すればよいのです．もっと長くなるけれどももっと構成的で，$F(n)$ のような無限集合に訴えないやり方が補題 IV.3.23 で述べられ，それによると，式全体の集合が決定可能であることが証明できます．

さて，σ を式とし，その最初の記号は s であったとしましょう．式 σ は規則 (☆) によって形成されねばならないので，s がアリティ n だとすると，σ は $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ という形になっているはずです．ここが大切なところなのですが，σ がこの形を**ただ 1 とおりに**とることがわかるのです．先ほど例に出した $\mathcal{W} = \{x, y, z, !, +, \cdot\}$ を引き続き用いることにして，σ を $\cdot{+}x!y{+}!zy$ としましょう．これは $(x + y!) \cdot (z! + y)$ のポーランド記法です．このとき，最初の記号が $\cdot$，τ_0 が $+x!y$，τ_1 が $+!zy$ です．もちろんこの σ を $\cdot\tau_0'\tau_1'$ と書く方法は他にもあり，τ_0' が $+x!$，τ_1' が $y{+}!zy$ とできないことはないでしょうが，そうなると，τ_0' か τ_1' が式になってくれないのです．この**読み方の一意性**（補題 II.4.3）が重要なのは，それによって σ が一意的な**意味**をもつことがわかるからです．先ほどの代数的な例でいえば，σ の意味とは x と y と z とに数値を割り当てた際に計算で求められる数値のことになります．σ を $\cdot\tau_0\tau_1$ の形に一意的に書き下せば，再帰的に τ_0 と τ_1 を計算し，次にそれらを掛けあわせればよいわけです．モデルの理論において論理式をポーランド記法で書くことにしますが，その場合の意味とは，与えられた構造におけるその式の真理値のことです．

先ほどの $\cdot{+}x!y{+}!zy$ という特定の例については，読み方の一意性は目で見て確認できました．一般の場合は次のとおりです：

補題 II.4.3（**読み方の一意性**）　σ を語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式とするとき，

（1）σ の真の始切片はどれも式にならない．

（２） σ の最初の記号が s でそのアリティが n だとすると，式 $\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}$ を，σ が $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ の形になるようにとれる．しかもそのような $\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}$ のとり方は一意的である．

【証明】 (1)と(2)を一緒に $|\sigma|$ に関する帰納法によって証明する．そのために σ より短いすべての式についてこれらが成立しているものと仮定する．すでに述べられているとおり(2)の「存在」の部分は「式」の定義からただちにわかる．いま，σ の始切片 σ' で式になっているものを考える（これは σ 自身かもしれない）．空な列は式にならないので，$\sigma' = s\tau'_0 \cdots \tau'_{n-1}$ となるような式 $\tau'_0, \cdots, \tau'_{n-1}$ がとれる．このとき，τ_0 と τ'_0 は一致する．なぜなら，そうでないとどちらかがもう一方の真の始切片となって，帰納法の仮定の(1)に反することになる．同様に，$\tau_i = \tau'_i$ となることを i に関して帰納的に示そう．もしも $j < i$ のとき $\tau_j = \tau'_j$ となっているなら，τ_i と τ'_i は σ の中で同じ位置から始まるから，両者が異なっているとしたら一方が他方の始切片となって帰納法の仮定に矛盾してしまうので，$\tau_i = \tau'_i$ である．これで $\sigma' = \sigma$ がわかり，(1)と(2)が確かめられた． □

さらに，部分式についてのいくつかの事項が必要になります．

定義 II.4.4 σ を語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式とするとき，σ の**部分式**とは σ の中のひとつながりの部分列でそれ自身が式であるもののことをいう．

たとえば σ が $++xy+zu$ だったとしましょう．これは $(x+y)+(z+u)$ に対応するポーランド記法です．このとき $+xy$ とか x だけからなる式とかは σ の部分式です．$+xu$ は部分式ではありません．σ にあらわれる記号で作られた式なのですが σ のひとつながりの部分になっていないからです．$+xy+$ も部分式ではありません．これはひとつながりの部分なのですが式ではないからです．実のところ，二つ目の $+$ 記号に注目するならば $+xy$ だけがこの $+$ 記号から始まる部分式なのです．より一般には，

補題 II.4.5 σ を語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式とするとき，各記号の σ における各出現位置は，それぞれ一意的な部分式の開始位置となる．

【証明】 一意性は補題 II.4.3 からただちにわかる．また存在は「式」の定義（II.4.1）によって帰納法でたやすく証明できる．〔訳注：$\sigma = s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ と一

意的にあらわしたとして，注目している出現位置を含む部分式 τ_i について帰納法の仮定を用いる．とくに，注目しているのが最初の s であれば σ 全体がその答である.〕 □

定義 II.4.6　語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式 σ のある記号のある出現位置について，そのスコープとは，σ のその位置から始まる一意的な部分式のことをいう.

たとえば σ が $++xy+zu$ であれば，一つ目の $+$ のスコープは σ 全体，二つ目の $+$ のは $+xy$，三つ目の $+$ のは $+zu$ です．フォーマルには，σ はある有限順序数上の函数ですので，先ほどの補題や定義でインフォーマルに用いられた「出現位置」という言葉は特定の $\sigma(i)$ について述べることでフォーマルに言いなおすことができます．たとえば σ が $++xy+zu$ であれば，$\mathrm{dom}(\sigma) = 7$ であり，三つの $+$ 記号はそれぞれ $\sigma(0), \sigma(1), \sigma(4)$ です.

このセクションのしめくくりにいくつか注意を述べます.

集合論の中で考えているときは記号の集合 $\mathcal{W}$ はどんな濃度でもかまわないのですが，これが有限または可算のときには，$\mathcal{W} \subseteq HF$ と仮定してしまうのが通例です．このとき，演習問題 I.15.14 によって，$(\mathcal{W}, \alpha)$ のすべての式もまた HF に属することになって，セクション I.15 で表明した，有限の数学はすべて HF の中でなされるというわたくしたちの期待にかないます.

次に，ポーランド記法の構文の決定可能性について．$\mathcal{W}$ が有限だったとすると，$(\mathcal{W}, \alpha)$ 自体を $\sigma \in \mathcal{W}^{<\omega}$ と一緒にコンピュータのプログラムに入力できます．**構文解析アルゴリズム** は σ が式かどうかを判定し，式である場合には σ が $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ であるような式の一意的な列 $\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}$ を出力します．そうしたアルゴリズムが**存在**することは定義から明らかです．σ を $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ の形にあらわせるような $\mathcal{W}^{<\omega}$ の空でない要素 τ_i の可能な選び方をすべてリストして，そのすべての場合について再帰的に τ_i が式であるかどうかを判定すればよいのです．もちろん，このアルゴリズムはおそろしく非効率です．もっとずっと効率のよい手順が次で与えられます.

演習問題 II.4.7　語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の与えられた列 $\sigma = (s_0, \cdots, s_{k-1}) \in \mathcal{W}^{<\omega}$ に対して $\mathrm{count}(\sigma) = \sum_{j<k} (\alpha(s_j) - 1)$ と定めよう．ただし空な列については $\mathrm{count}(()) = 0$ とする．このとき，σ が式であるためには，$\mathrm{count}(\sigma) = -1$

であり，かつ，$\ell < |\sigma|$ のときつねに $\mathrm{count}(\sigma\restriction\ell) \geq 0$ であることが，必要かつ十分である．

この結果を用いれば，σ が式であるかどうか，もしそうであったら τ_0 がどこで終わるか，τ_1 がどこで終わるか，といったことを，とても高速に判定できます．

ポーランド記法はその双子の兄弟である逆ポーランド記法（後置記法あるいは RPN）とともに，コンピュータの実装に応用されています．逆ポーランド記法というのは函数記号を後ろに書く記法で，たとえば $++xy+zu$ だったら $xy+zu++$ と書かれることになります．プログラミング言語 Lisp は，このセクションで扱ったほうのポーランド記法のある変種で記述されます．逆ポーランド記法のほうはスタック機械への入力に用いられ，とりわけ，1972 年以降ヒューレット・パッカード社の設計している電卓に採用されています．x, y, z, u がなんらかの数値だったとしたら，$xy+zu++$ の順に打ち込んで計算するわけです．

コンピュータの言語に詳しい読者には，このセクションの議論はずいぶんと素朴なものだとわかったことでしょう．言語のフォーマルな数学的定義と読み方の一意性の証明とが簡単になるように，ポーランド記法を採用したのです．コンピュータの言語の構文とその解析については，コンパイラ設計に関するテキストを見てください．コンピュータの言語では，本当に基本となる「記号」は文字であり，それらの列が語を形成します．たとえば C や Java や Python では `(alice + bob)+(cheryl + david)` のように書くことができ，これはポーランド記法では `+ + alice bob + cheryl david` となります．この場合，語（あるいは**トークン**）の切れ目を示す空白文字（スペース）が必要になることに注意しましょう．わたくしたちの定義における $\mathcal{W}$ の要素はこのトークンたちなので，この文字列を 7 つのトークンの列に切りわけるために字句解析という準備作業が必要となります．それからこのトークンの列がポーランド記法の構文解析にかけられ，`+` がアリティ 2，`alice` と `bob` と `cheryl` と `david` がいずれもアリティ 0 をもつという前提で，この列が整形式と認定されることになるのです．

II.5　1 階論理のシンタクス

セクション 0.2 で論理記法の数学でのインフォーマルな用い方について述べました．その精神から出発しましょう．セクション 0.4 では，フォーマルな論理のシンタクスとセマンティクスの区別を論じました．このセクションで，意味についての**インフォーマルな**議論をまじえながら，論理の構文のきちんとした定義を与えます．次の三つの文を考えてみます．それぞれをまず数学で用いられるインフォーマルな記法で示し，次にそれに対応する正式なポーランド記法を示します．

SQ:	$\forall x(0 < x \to \exists y(x = y \cdot y))$	$\forall x {\to} {<} 0 x \exists y {=} x {\cdot} y y$
EXT:	$\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$	$\forall x \forall y {\to} \forall z {\leftrightarrow} {\in} z x {\in} z y {=} x y$
EM:	$\exists y \forall x(x \notin y)$	$\exists y \forall x \neg {\in} x y$

これらの文字列が含意記号 $\to$ や変数 x, y，量化子 $\forall, \exists$ などの記号から作られているというのもシンタクスの一部です．また，これらの文字列がいずれも論理の文であること，いっぽうこれらと同種の記号から作られる $xx\forall{\to}$ といった文字列は論理の文でないということも，シンタクスによってわかるのです．フォーマルな証明可能性 $\Sigma \vdash \varphi$ の定義もシンタクスの一部です（セクション II.10 を見なさい）．たとえばセクション I.6 で空集合の存在が ZF から証明できることを見ました．フォーマルな証明論によって $ZF \vdash EM$ となります（演習問題 II.11.15 を見なさい）．また EXT とはもちろん ZF の外延性の公理のことです．

論理の文に意味を結びつけるのがセマンティクスの役割の一つです．たとえば SQ はすべての順序体において T または F のいずれかの真理値をもちます．この文はすべての正の要素は平方根をもつという主張なので，$\mathbb{R}$ においては T，$\mathbb{Q}$ においては F です．真理値がどのように定められるかについては後ほどきちんと述べましょう．演習問題 I.2.1 には，EXT と EM とが特定の真理値をとる有限モデルのインフォーマルな例をいろいろ挙げました．いっぽう，文字列 $xx\forall{\to}$ は無意味です．つまり，これには真理値を定めません．

これらの例からインフォーマルな記法のほうがフォーマルなポーランド記法にくらべてずっと理解しやすいことがわかるでしょう．しかしそのことは

この本では問題になりません．ほとんどの場所ではインフォーマルな記法をフォーマルな記法の略記として用いつづけることにしましょう．略記法についてはセクション II.6 で論じます．モデル理論においては，読みかたの一意性をもったフォーマルな言語の構文を定める方法がなにか一つあることがわかればそれで十分なのです．そして，ポーランド記法がそうした構文を与えてくれる簡便な方法の一つになっているというわけです．なにも数学のすべてをこのフォーマルな記法に書き換えようというのではありません．実際，ここに示した SQ と EXT と EM のインフォーマルな表記がそのままフォーマルにも正しいものとなるような文法を定義するのもたやすいことです．二項演算記号を中置するルールと，カッコの使用に関するルールを書き示せばよいだけです．しかし，連続体仮説を集合論の言語のフォーマルな文として書けるような文法を設計するというのはきわめてこみ入った作業になることでしょう．もしも $\in$ と $=$ だけを用いて CH を書いたなら，ポーランド記法を用いようが用いまいが，とてつもなく長くて判読不能なものになることでしょう．わたくしたちの定義 I.13.8 での定式化は，定義の長い連鎖を前提にしています．Isabelle/ZF [35] とか Mizar [47] のような証明検証用コンピュータ言語は，ちょうどプログラミング言語において函数を定義するように，ユーザがそうした数学的な定義を与えることを，フォーマルな言語の一部として認めています．そのため，これらの言語のシンタクスもセマンティクスも，とても複雑なのです．

シンタクスを定義するにあたって，まず何を記号とするかを指定しましょう．記号は**論理記号**と**論理外記号**に大別されます．論理記号はこの章全体を通じて共通です．SQ と EXT と EM に現われた論理記号は $=, \forall, \exists, x, y, z, \to, \neg, \leftrightarrow$ でしたが，以下に示すとおり，他にもいくつかあります．**論理外記号**は文脈によって異なります．SQ では 0 と $<$ と $\cdot$ を用いていて，これらは順序体とか順序環について話すのに適したものです．EXT と EM では $\in$ を用いているので，演習問題 I.2.1 でやったようになんらかの集合論の公理系のモデルについて話すのにふさわしいでしょう．

定義 II.5.1　論理記号とは次の 8 つの記号

$$\wedge \; \vee \; \neg \; \to \; \leftrightarrow \; \forall \; \exists \; =$$

と，それに加えて可算無限個の変数である．変数全体の集合を VAR と書く．通常，u, v, w, x, y, z に必要に応じて添字をつけたもので変数をあらわすものとする．

この本では論理記号はこのとおり固定されていますが，他の本を見るといろいろな違いがあります．どうでもよいレベルの話としては，"∧" のかわりに "&" を「かつ」の記号として用いる人もあります．また多くの本でポーランド記法のかわりに中置記法を用いており，そのさい $(\varphi\vee\psi)\wedge\chi$ と $\varphi\vee(\psi\wedge\chi)$ を区別するためにカッコを論理記号に含めなければなりません．ポーランド記法ではこれらはそれぞれ $\wedge\vee\varphi\psi\chi$ と $\vee\varphi\wedge\psi\chi$ です．

少し進んだ話として，著者によっては用いる命題演算記号の集まりが異なる場合もあります．たとえば，$\vee$ と $\neg$ だけで済ませることもできます．他のものがこれらを使ってあらわせるからで，たとえば $\to\varphi\psi$ は $\vee\neg\varphi\psi$ と論理的同値なのです．この論理的同値ということについては後ほど（定義 II.8.2）きちんと定義します．

より深いレベルの話として，等号 $=$ が論理記号の一つであることに注意しましょう．古い時代の研究ではそうでもなかったのですが，近年の数理論理学ではこのようにするのが慣例になっています．その結果として，シンタクスの面では，$\forall x{=}xx$ といった，$=$ だけを用いた文は論理外記号がどんなものであれ必ず現われることになります．セマンティクスの面では，$=$ の意味が固定されるので $\forall x{=}xx$ は論理的妥当，すなわちあらゆるモデルにおいて真となります．ですから，セクション I.2 で指摘したとおり，特定の理論たとえば集合論なり群論なりの公理をリストアップするにあたっては，この $\forall x{=}xx$ に限らず，$=$ についての論理的妥当な主張をリストに入れないのです．

定義 II.5.2　述語論理の**語彙**とは，**論理外記号**の集合 $\mathcal{L}$ のことで，この $\mathcal{L}$ は二つの互いに交わらない集合 $\mathcal{F}$（**函数記号**の集合）と $\mathcal{P}$（**述語記号**の集合）に分割される．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{P}$ はいずれも**アリティ**に応じて $\mathcal{F}=\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{F}_n$，$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{P}_n$ と分割される．$\mathcal{F}_n$ に属する記号は n 変数函数記号と呼ばれる．$\mathcal{P}_n$ に属する記号は n 項述語記号と呼ばれる．とくに，$\mathcal{F}_0$ に属する記号は**定数記号**と呼ばれ，$\mathcal{P}_0$ に属する記号は**命題定項**と呼ばれる．

基本的な論理の使用にあたっては，たいていの場合，$\mathcal{L}$ が有限集合で，したがってほとんどの $\mathcal{F}_n$ と $\mathcal{P}_n$ が空集合になっています．群論を公理化するさいの $\mathcal{L}$ の選び方は叙述のしかたによって変わってきます．セクション 0.4 では群の公理系を $GP = \{\gamma_1, \gamma_2\}$，ただし

$$\gamma_1\text{：}\ \forall x, y, z[\,x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\,]$$

$$\gamma_2\text{：}\ \exists u[\forall x[\,x \cdot u = u \cdot x = x\,] \wedge \forall x \exists y[\,x \cdot y = y \cdot x = u\,]]$$

としました．この場合，$\mathcal{L} = \mathcal{F}_2 = \{\,\cdot\,\}$ で，他の $\mathcal{F}_n$ と $\mathcal{P}_n$ はすべて空集合です．この γ_1 と γ_2 をポーランド記法に直すのはたやすいことです（略記についてのセクション II.6 を見なさい）．より重要なこととして，群の公理を次のようにして $\{\gamma_1, \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}\}$ とする本がたくさんあります：

$$\gamma_{2,1}\text{：}\ \forall x[\,x \cdot 1 = 1 \cdot x = x\,]$$

$$\gamma_{2,2}\text{：}\ \forall x[\,x \cdot i(x) = i(x) \cdot x = 1\,]$$

こんどは $\mathcal{L}$ は $\{\,\cdot\,, i, 1\}$ で，$\mathcal{F}_2 = \{\,\cdot\,\}$，$\mathcal{F}_1 = \{i\}$，$\mathcal{F}_0 = \{1\}$ となります．$i(x)$ が，通常 x^{-1} と書かれる x の逆元をあらわしているわけです．こうすると語彙は大きくなりますが公理は簡単になります．とくに，この語彙のもとでは，群の全体は一つの**等式理論**をなすのです．すなわち，このクラスは全称量化された等式のリストによって定められます．等式理論は 1 階のクラスのうち，いくつかの興味ある性質を示す特別な種類のものです．これについてはセクション II.14 を見てください．群のこの二つの公理化が「実質的に同等」ということについてはセクション II.15 でとりあげますが，そのとき必要となるのは，$\{\gamma_1, \gamma_2\}$ をもとにして逆元の存在と一意性が証明できるので逆元をあらわす函数記号 i を導入しても「害がない」ということです．ZF の展開にあたって $x \cup y$ のような定義された函数の導入に「害がない」こともこれに関連しています．

アーベル群を論じるときは加法を用いて（公理を）書くのが慣例になっているので，$\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ で，$\mathcal{F}_2 = \{+\}$，$\mathcal{F}_1 = \{-\}$，$\mathcal{F}_0 = \{0\}$ となります．ここで $-$ が乗法の群の $i(x)$ とか x^{-1} とかに類比される単項演算（1 変数函数）であることに注意しましょう．ですから，$x - y$ は $x + (-y)$ の略記なのです．いま論じているポーランド式シンタクスでは，函数記号が 1 変数であると同時に 2 変数でもあるということは許されません．略記については

セクション II.6 でくわしく論じています．$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ のような順序環を論じるときは，

$$\mathcal{L}_{OR} = \{ <, +, \cdot, -, 0, 1 \}$$

がよく用いられます．ここでは $\mathcal{F}_2 = \{+, \cdot\}$，$\mathcal{F}_1 = \{-\}$，$\mathcal{F}_0 = \{0, 1\}$，そして $\mathcal{P}_2 = \{<\}$ です．先ほどの文 SQ はこの語彙で書きあらわされていました．順序環が $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ のように順序体であった場合は，乗法の逆元をあらわす記号を追加した $\mathcal{L}_{OR} \cup \{i\}$ を用いたほうが便利でしょう（例 II.8.24 を見なさい）．

ここまでの例では，わたくしたちのよく知っている代数的な函数や関係を表示するのにわたくしたちのよく知っている数学記号を用いました．抽象的な議論のさいにはしばしば普通の文字で函数や関係をあらわします．たとえば，$\forall x(p(x,x) \to \exists y q(x, f(y,x), g(f(g(x), g(y)))))$ という文，これはポーランド記法の $\forall x {\to} pxx \exists yqxfyxgfgxgy$ の略記ですが，そういう文を書くことがあるかもしれません．この文は，$p \in \mathcal{P}_2$，$q \in \mathcal{P}_3$，$f \in \mathcal{F}_2$，$g \in \mathcal{F}_1$ である限りにおいて，なんらかの（くだらないことかもしれませんが）意味のある主張になるわけです．

定義 II.5.3　語彙 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ が定義 II.5.2 のとおりに与えられたとするとき，

（1）$\mathcal{L}$ の**項**とは定義 II.4.1 にいう意味でのポーランド記法の語彙 $\mathcal{F} \cup VAR$ の整形式のこと．ただし VAR に属する記号のアリティは 0 で，$\mathcal{F}_n$ に属する記号のアリティは n であるものとする．

（2）$\mathcal{L}$ の**原子論理式**とは，$p\tau_1 \cdots \tau_n$ の形の記号列で，$n \geq 0$ であり，$\tau_1, \cdots, \tau_n$ は $\mathcal{L}$ の項であって，$p \in \mathcal{P}_n$ であるもの，または，$n = 2$ であって p が等号 $=$ であるもののこと．

（3）$\mathcal{L}$ の**論理式**とは次のルールで構成される記号列のこと：

a.　原子論理式は論理式である．

b.　φ が論理式で $x \in VAR$ のとき $\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ も論理式である．

c.　φ が論理式のとき $\neg\varphi$ も論理式である．

d.　φ と ψ が論理式のとき $\vee\varphi\psi$ も $\wedge\varphi\psi$ も $\to\varphi\psi$ も $\leftrightarrow\varphi\psi$ も論理式である．

ここで等号について(2)で別条項をもうける必要があったのは "$=$" が論理記号であって $\mathcal{P}_2$ のメンバーではないからです．すべての論理式と項が，ポーランド記法の語彙 $\mathcal{F} \cup \mathcal{P} \cup VAR \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ において $\neg$ がアリティ 1，$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ のメンバーのアリティを 2 とした場合の整形式になっていることがわかります．しかし，整形式であっても論理式でも項でもないものがたくさんあります．たとえば $\forall xy$ などはそうです．ですから，読み方の一意性を示した補題 II.4.3 が教えてくれることは，わたくしたちの求めているより少ないと思ってしまいそうですが，実際には**多い**のです．たとえば χ が $\vee\varphi\psi$ で，この φ と ψ が論理式だったとしましょう．セクション II.7 でやるように χ に真理値を割り当てようとするときには，χ が別の仕方で $\vee\varphi'\psi'$ の形に読め，しかも φ' も ψ' も論理式である，などということが起こらないことが重要になってきます．実際には，補題 II.4.3 によって，φ' や ψ' が整形式であるかぎり，そのようなことは起こりえません．

定義 II.4.6 で述べた，ポーランド記法におけるスコープの議論を用いて，自由変数と束縛変数の定義ができるようになります．まず帰納法で次のことがわかります

補題 II.5.4 論理式 φ においては，$\mathcal{P} \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ に属する記号のどの出現のスコープも論理式であり，$\mathcal{F} \cup VAR$ に属する記号のいかなる出現のスコープも項である．

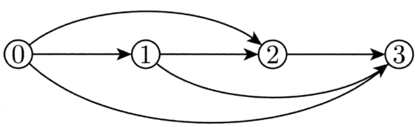
そうしたスコープのことを，φ の**部分論理式**とか**部分項**とか言うのです．

定義 II.5.5 論理式 φ の中の変数 y の出現が**束縛されている**とは，この出現箇所が，y に作用する（すなわち直後に y が続くような）$\forall$ か $\exists$ のスコープ内に含まれていることである．束縛されていない出現のことを**自由な**出現という．自由な変数が一つもない論理式 φ のことを**文**という．

たとえば EXT はこのセクションの冒頭の論理式 $\forall x \forall y {\rightarrow} \forall z {\leftrightarrow} {\in} zx {\in} zy {=} xy$ ですが，一つ目の $\forall$ のスコープは EXT 全体，二つ目の $\forall$ のスコープは頭の "$\forall x$" を除いた残りのすべて，三つ目の $\forall$ のスコープは $\forall z {\leftrightarrow} {\in} zx {\in} zy$ という部分論理式です．この最後の部分論理式を ψ と呼びましょう．三つ目

の $\forall$ は z に作用していて（$\forall$ の直後に z が続いていて）しかも EXT における z の三つの出現箇所はいずれも ψ に含まれているので，EXT における z の出現はいずれも束縛されています．変数 x や y の EXT における出現も同様に束縛されているので，EXT は文です．ψ においては x と y が自由なので，ψ は文ではありません．

セマンティクスについてはセクション II.7 で定義しますが，文はそれぞれのモデルにおいて真または偽の定まった真理値をもつことになります．ただし，その値はモデルによって違うかもしれません．（EXT の場合について演習問題 I.2.1 を見なさい．）論理式はその自由変数のなんらかの属性を表現します．たとえば演習問題 I.2.1 で扱った



というモデルにおいては，EXT は真であり，ψ はこのモデルの要素の対のある属性（その対をなす二つのものがまったく同じ要素からなるときに真となる属性）をあらわしています．

理論の公理としては文だけが用いられます．記法の簡潔さのために，公理が自由変数をもつ論理式の形で提示されることが頻繁にありますが，そのさい自由変数は $\forall$ で量化されているものとみなされます．これは数学全般に共通のとりきめです．たとえば代数のテキストで結合律を $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ と書いてあることがよくあります．わたくしたちの記法では $=\cdot x\cdot yz\cdot\cdot xyz$ です．この式を χ と呼びましょう．実際にはこの公理は前に述べた γ_1 のことと解されます．γ_1 は $\forall x\forall y\forall z\chi$ であり，χ の**全称閉包**の一つです．

定義 II.5.6　論理式 φ の**全称閉包**とは，$\forall x_1\cdots\forall x_n\varphi$，$n\geq 0$ の形の任意の**文**のことである．

ですから φ がもともと文だったら，それは自分自身の全称閉包になっています．ここでは変数の順番の指定を何もしませんでしたが，そのことは問題になりません．あとでセマンティクスを定義すればたやすくわかるとおり，すべての全称閉包はお互いに論理的同値になるからです（補題 II.8.3）．

先ほどの例でいえば，$\forall z\forall y\forall x\chi$ も $\forall z\forall x\forall y\chi$ も，また $\forall x\forall z\forall x\forall y\forall y\chi$ ですら，χ の全称閉包になっています．セクション I.2 で集合論の公理をリストアップしたとき，「どの公理もすべての自由変数を全称量化した状態で述べられていると考えてください」と言ったのは，リストに挙げた公理はそれぞれその全称閉包の一つに置き替えてくれという意味だったわけです．

わたくしたちのシンタクスの定義では，一つの式の中に同じ変数が自由に出現し，また束縛されても出現するということが認められていますが，読者はそうした用法を混乱のもとだと思うかもしれません．たとえば $\mathcal{L} = \{\in\}$ とし，φ を $\wedge\exists y{\in}yx{\in}xy$ つまり $\exists y(y \in x) \wedge x \in y$（$x$ は y の空でない要素である）を意味する論理式としましょう．前半の二つの y の出現は部分論理式 $\exists y{\in}yx$ の中にあり，したがって束縛されています．いっぽう，三つ目の y の出現は自由です．この φ は，束縛変数（またの名をダミー変数）y を z に書き換えて得られる論理式 φ': $\wedge\exists z{\in}zx{\in}xy$ と（定義 II.8.2 でいう意味において）論理的同値です．たいていの読者は φ より φ' のほうが好ましいと考えるでしょう．（とはいえ演習問題 II.7.21 も見てください．）同じ問題が微積分でも生じます．たとえば

$$f(x,y) = \sin(xy) + \int_1^2 \cos(xy)\,dy = \sin(xy) + \int_1^2 \cos(xt)\,dt$$

という定義が考えられます．どちらの書き方も正当ですが，たいていの読者は積分に用いるダミー変数（束縛変数）として t を使う第二の記法が好ましいと考えることでしょう．セマンティクスを定義してしまえば，ダミー変数の変更が論理式の意味を変えず，したがってどんな論理式も，同じ変数を自由変数と束縛変数として同時に用いたりしていない論理式と論理的同値になることが，たやすく証明できます（演習問題 II.8.26）．

注意書き　論理外記号の集合 $\mathcal{L}$ のことをわたくしたちは「語彙」と呼ぶことにしました．モデル理論の文献ではこれを「言語 $\mathcal{L}$」と呼ぶほうが普通ですが，フォーマルな言語の理論で言語といえば，基本となる記号から作られた有限列のなんらかの集合（たとえば $\mathcal{L}$ の論理式全体の集合のような）を意味します．通常の意味では，英語などの個々の言語における “cat”, “hat”, $\cdots$ といった単語全体の集まりのことを「語彙」といい，いっぽう，たとえば “The cat wore a hat”（「そのネコは帽子をかぶっておった」）のように，そ

れらの単語を並べたものが，英語という言語の文と呼ばれるわけですから，わたくしたちの用語は「語彙」という言葉の通常の意味に近いものといえましょう．

注意書き　このセクションで用いた x, y, z, t といった「変数」は本当は 121 ページで説明した「メタ変数」です．集合 VAR の要素が実際には何であるかについて，わたくしたちはまだ言ってもいません．論理学でのいたって普通の習慣どおり，わたくしたちは文字 x, y, z, t などを VAR の任意の要素をあらわすもの，φ とか ψ とかの文字を論理式をあらわすものとして用いています．

II.6　略記法

インフォーマルな数学をフォーマルな論理体系に翻訳するのはいつだって困難です．わたくしたちのポーランド記法についてはとりわけそうです．まず間違いなく，読者のみなさんは，これを使うのはちょっとばかり苦痛だとすでに思っていることでしょう．論理を学んで数学に応用するのがわたくしたちの目的なのですから，数学的に興味のある主張をはなはだしい苦痛なしで表現できる略記法を導入する必要があります．そうした略記法をおおまかに，低水準のもの，中間水準のもの，高水準のものに分類しましょう．

低水準の略記法　実際の（略記されない）表記が数学の標準的な取り決めによって一意的に定まるもの．セクション II.5 の文 SQ, EXT, EM がそうで，そもそもこれらのポーランド記法は通常の記法を明らかな仕方で書きなおしただけのものです．「数学の標準的な取り決め」には，代数での演算の優先順位も含みます．たとえば $x + y \cdot z$ とか $x + yz$ とかは，どちらも $+x \cdot yz$ の略記であって $\cdot + xyz$ の略記ではありません．その理由は，$+$ よりも $\cdot$ のほうが両隣と強く結合することと，積をあらわす $\cdot$ を省略してもよいことです．命題演算記号には通常 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ という優先順位がつけられますから，命題論理の文 $\neg p \vee q \rightarrow r$ は $\rightarrow \vee \neg pqr$ を略記しているわけです．ただしこの順位はすべての文献で完全に共通とまではいえないので，誤解のおそれのあるときにはカッコを挿入します．5 つの記号のうちで $\neg$ がいちばん強く結合することと，$\wedge$ と $\vee$ が $\rightarrow$ や $\leftrightarrow$ より強く結合することだ

けは，大切なので覚えておくべきです．量化記号の繰り返しの省略も標準的な取り決めです．たとえばセクション II.5 の EXT のはじめの $\forall x, y$ は $\forall x \forall y$ の意味にしか解されません．

中間水準の略記法　実際の表記が論理的同値の意味でだけ明白であるもの．（論理的同値の正確な定義は II.8.2 を見なさい．）ここには標準的な取り決めがなくて，しばしば日常言語の表現が論理的記述と混ぜ合わされています．たとえばモデル理論において，言及の範囲のサイズが n 以上であると主張する文 δ_n を各 n について書き下せることが重要になってきます．δ_4 は $\exists w, x, y, z$[これらは互いに異なる] のようにあらわせるでしょう．このことをフォーマルに書きあらわすたくさんの論理的同値なやり方のどの一つを採用するかはまったく問題になりません．たとえば

$$\exists w, x, y, z \big[w \neq x \wedge w \neq y \wedge w \neq z \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \big]$$

というのはそうしたやり方の一つです．さらにこの表現をポーランド記法に直す前に，$\wedge$ が左結合か右結合かを決めなくてはなりません．つまり $p \wedge q \wedge r$ が $\wedge\wedge pqr$ と $\wedge p \wedge qr$ のどちらの略記でもありうるのです．しかし，どちらの書き換えも論理的同値なので，どちらを採用するかの取り決めをするには及ばないのです．

高水準の略記法　実際の表記がある理論のもとでの同値（定義 II.8.2）の意味でだけ明白であるもの．これは代数学でよくあることです．たとえば $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$ を用いて単位元をもつ環について（あるいは 1 要素の環について）論じていたとしましょう．このとき，整数係数の多項式がフォーマルな論理における項で**あるとわかっている**ことが重要になります．すなわち $3x$ は $x + (x + x)$ の略記として使えるというわけです．しかしこの式 $3x$ は $(x + x) + x$ の略記でもありえます．両者の同等性 $\forall x[x + (x + x) = (x + x) + x]$ は，$+$ が結合律をみたさない場合に破れることがありうるので論理的妥当ではありませんが，すべての環で妥当します．また，$3x$ は $(1 + 1 + 1) \cdot x$ の略記でもありえます．単位元をもつ環の話をしているかぎり，$3x$ という表記が実際にはどのフォーマルな項を意味しているかを指定する必要はありません．

わたくしたちが集合論を展開した際にも，理論のもとでの同値性を広範囲

で用いました．たとえばセクション I.2 で集合論の公理について論じたとき，定義された概念は語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ の論理式の略記とみなす，と言いました．セクション I.6 では，$\mathrm{emp}(y)$ をみたすただ一つの y のことを $\emptyset$ と定義しました．この $\mathrm{emp}(y)$ は $\forall x[x \notin y]$ の略記です．では，「$\emptyset \in z$」というのは厳密には $\mathcal{L}$ のどの論理式の略記なのでしょうか．これに対する答えとして，φ_1: $\exists y[\,\mathrm{emp}(y) \wedge y \in z\,]$ と，φ_2: $\forall y[\,\mathrm{emp}(y) \rightarrow y \in z\,]$ という二つが考えられます．

二つの式 φ_1 と φ_2 は論理的同値ではありません．このことは，（演習問題 I.2.1 で扱った）モデル



において文 $\forall z[\,\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2\,]$ が偽であることからわかります．このモデルでは，a と b の両方に対して φ_1 が偽であり，また a と b の両方に対して φ_2 が真になっています．それでも，$\forall z[\,\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2\,]$ は ZF の論理的帰結ではあります．空集合がただ一つ存在することを ZF が証明するからです．ですから，ZF を展開するにあたっては，先ほどの略記がどちらの論理式を意味しているかをはっきりさせる必要はありません．セクション I.2 で無限の公理を正式な $\mathcal{L}$ の文として提示した際には，φ_1 を用いることにしたのでした．

前のパラグラフの下線を引いた語句のきちんとした定義はまだ与えていません．これについては続く二つのセクションで扱います．

さらに高い水準の話として，「x は可算である」という主張が原理的には $\mathcal{L} = \{\in\}$ の論理式として書けるのですが，この本にせよ他の集合論の書物にせよ，どの論理式をそのために考えるかを厳密に明らかにしているわけではありません．それでも，何かそのような論理式が**存在する**ということには**根本的な重要性**があります．というのも，内包公理（I.2 と I.6）によって $\{\,x \in z : Q(x)\,\}$ が存在するといえるには，$Q(x)$ が $\mathcal{L}$ で表現できる必要があり，したがって集合 $\{\,x \in z : x$ は可算である$\}$ を形成するにしても，「x は可算である」が $\mathcal{L}$ で表現できなくてはならないのです．公理的な理論展開における定義された概念にまつわるこうした問題は，セクション II.15 でさらにくわしく扱います．とりわけ，定理 II.15.2 を見てください．

II.7　1 階論理のセマンティクス

セクション II.5 では，**セマンティクス**が論理文に**意味**を割りあてるのだと言いました．これまでに議論してきた具体例においては，意味はインフォーマルには明白であったとはいえ，そうした意味というものに正確な数学的定義を与えることが大切です．例として次の文 SQ を考えましょう：

$$SQ:\ \ \forall x\big(0 < x \to \exists y(x = y \cdot y)\big) \qquad \forall x {\to} {<} 0 x \exists y {=} x {\cdot} y y$$

この SQ はすべての正の要素が平方根をもつという主張だから，$\mathbb{R}$ において T，$\mathbb{Q}$ において F だと言われました．より広く，任意の構造 $\mathfrak{A}$ において SQ の真偽を評価できます．いま $\mathcal{L} = \{<, 0, \cdot\}$ とすると，この構造は言及の範囲あるいは宇宙 A（すなわちすべての変数がそこに「値をとる」空でない集合）と，A 上の二項演算 $\cdot_{\mathfrak{A}}$ と二項関係 $<_{\mathfrak{A}}$ と，なんらかの特定の要素 $0_{\mathfrak{A}}$ からなるものでなければなりません．このことを $\mathfrak{A} = (A; \cdot_{\mathfrak{A}}, <_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{A}})$ と表現しましょう．言及の範囲に $A, B, C, D, \cdots$ などのイタリック体を用い，対応する構造全体をゴシック体（フラクトゥール体）$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \cdots$ であらわすのがモデル理論の慣例ですので，わたくしたちもこれに倣いましょう．本当にフォーマルには，$\mathcal{L}$ の記号ひとつひとつに適切なタイプのセマンティクス的な実体を対応させる函数が与えられていることを，この $\cdot_{\mathfrak{A}}$, $<_{\mathfrak{A}}$, $0_{\mathfrak{A}}$ といった添字のついた表記が意味しています．

定義 II.7.1　述語論理の語彙 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ が（定義 II.5.2, II.5.3 の要領で）与えられたとするとき，$\mathcal{L}$ に対する**構造**とは，対 $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ であって A は空でない集合であり $\mathcal{I}$ は $\mathcal{L}$ を定義域とする函数で，$\mathcal{I}(s)$ が適切なタイプのセマンティクス的な実体であるもの，すなわち $\mathcal{I}(s)$ のことを $s_{\mathfrak{A}}$ と表記したとして，

☞ $n > 0$ で $f \in \mathcal{F}_n$ のときは $f_{\mathfrak{A}}\colon A^n \to A$,

☞ $n > 0$ で $p \in \mathcal{P}_n$ のときは $p_{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$,

☞ $c \in \mathcal{F}_0$ のときは $c_{\mathfrak{A}} \in A$,

☞ $p \in \mathcal{P}_0$ のときは $p_{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, T\}$

をみたすもの，とする．

ここで $n = 0$ が別扱いになっていることに注意しましょう．$\mathcal{F}_0$ に属する

記号は定数記号で，したがって構造の宇宙内のある要素をあらわしています．$\mathcal{P}_0$ に属する記号は命題定項ですから，F あるいは T の真理値をあらわしています．これについては，構造の宇宙が何であるかは無関係です．偽を 0，真を 1 であらわす慣例にわたくしたちも従うことにします．

もう一つモデル理論の慣例に従って $A \neq \emptyset$ であることを要請しています．空な構造を認めてしまうと，あとあと妙なことが起こってしまうのです（注意 II.8.16 を見なさい）．

誤解のおそれがない限り，構造の表記をかなりインフォーマルに済ませることにします．たとえば $\mathcal{L} = \{p, f\}$ で $p \in \mathcal{P}_2$，$f \in \mathcal{F}_1$ の場合に，「$\mathfrak{A} = (\mathbb{R}; <, \cos)$ としよう」と言ってよいでしょう．これで $p_{\mathfrak{A}}$ が関係 $<$ であり $f_{\mathfrak{A}}$ がコサイン函数であることは明らかなはずだからです．しかし $\mathcal{L} = \mathcal{F}_2 = \{f, g\}$ のときに「$\mathfrak{A} = (\mathbb{R}; \sin, \cos)$ としよう」と言ったのでは曖昧さが残るので，たとえば $f_{\mathfrak{A}}$ がサイン函数，$g_{\mathfrak{A}}$ がコサイン函数だと明言せねばなりません．また，$\mathcal{L}_{OR} = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$ を用いているときは，ただ「$\mathfrak{A} = \mathbb{R}$ としよう」と言ってもよさそうです．これなら $<$ と $+$ と $\cdot$ と 0 と 1 が期待どおり実数の順序関係と和と積とゼロとイチをあらわしていることは，文脈から明らかであろうからです．ここでわたくしたちは，ある（任意の）環における和と積の函数をあらわすために $+$ と $\cdot$ を用いつつ，また一方で $x \cdot y + z + 1$ といった項のフォーマルな表現にも同じ記号を用いるという，代数学において援用される記号の濫用を恒久化しようというわけです．

定義 II.7.1 の $(A, \mathcal{I})$ 方式はほとんど使うことはありません．この形で定義を与えた主たる目的は，構造 $\mathfrak{A}$ とは集合論的に見てどのようなものかをはっきりさせることです．構造の縮小と拡張（定義 II.8.14）の議論をする際には，この記法が有用になってきます．

次は，$\mathcal{L}$ に対する構造 $\mathfrak{A}$ と $\mathcal{L}$ の文 φ についての $\mathfrak{A} \models \varphi$（$\varphi$ が $\mathfrak{A}$ において真）の概念を定義しましょう．これは φ に関する再帰でなされます．先ほどの文 SQ を例にとり，$\mathcal{L} = \{<, 0, \cdot\}$，$\mathfrak{A} = \mathbb{Q}$（通常の順序と数ゼロと積を考える）としましょう．このとき SQ が $\mathfrak{A}$ において偽であることは，記号では

（1） $\mathfrak{A} \not\models SQ$

（2） $\mathfrak{A} \models \neg SQ$

（3） $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(SQ) = F$

という 3 とおりの互いに同値な書き方ができるようになります．この $\models$ という二重改札ゲート記号は「…のモデルとなる」とか「…をみたす」とか読むのです．(1) と (2) の形が通常用いられるものですが，構造 $\mathfrak{A}$ が与えられたとして $\mathcal{L}$ の文 φ に対して函数 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}$ を定義しようとしていることを強調するために (3) を用いるのです．$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(SQ)$ のきちんとした定義のために SQ の構文を解きほぐしてゆきます．この文は「$\forall x$」で始まります．インフォーマルに見てこの主張はすべての $x \in \mathbb{Q}$ について真になるわけではなく，たとえば

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}\big(0 < x \to \exists y(x = y \cdot y)\big)[2] = F \tag{A}$$

となっています．論理式 $0 < x \to \exists y(x = y \cdot y)$ は文ではなく自由変数 x をもっているので，この x を有理数 2 と解していることをあらわす「[2]」が必要なのです．いっぽう，

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}\big(0 < x \to \exists y(x = y \cdot y)\big)[4] = T \tag{B}$$

でもあります．(A) の理由は 2 が正なのに $\mathbb{Q}$ に平方根をもたないということです．これはフォーマルには

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(0 < x)[2] = T \tag{C}$$

かつ

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\exists y(x = y \cdot y))[2] = F \tag{D}$$

ということから，論理演算 $\to$ の通常どおりの真理値表（つまり $(T \to F) = F$）によって (A) が得られるというわけです．次に (C) と (D) を説明するにあたっては，それぞれ $<_{\mathfrak{A}}$ の意味と $\exists$ の意味を用いることになります．ポーランド式記法を用いるわたくしたちの正式の構文では，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ の値を求める再帰的な方法は φ の最初の（いちばん左の）記号によって決まります．そこで，val の正式な定義（II.7.4, II.7.6, II.7.8）も，正式のポーランド式記法を用いて与えることにします．

正式な定義を与える前に，この「[2]」という言い方についてもう一つ注意をします．自由変数を複数含む論理式にこの記法を拡張するのはたやすいことですが，その際，意味が曖昧になるおそれがあります．たとえば，$\mathfrak{A} = \mathbb{Q}$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y = x \cdot z)[2, 6, 3]$ と書いたのでは y, x, z のどれを 2,6,3 のど

れに置きかえるのかが指定されないので，意味が不明瞭です．多くの場合これは変数名のアルファベット順によるとか論理式内での変数の出現順によるとかの仕方で文脈から明らかになるのですが，そうでないときには

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y = x \cdot z)\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} = T \qquad \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y = x \cdot z)\begin{bmatrix} y & x & z \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} = F$$

といった記法を用いることにします．この $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ という配列記法が表示しているのは，記号の集合 $\{x, y, z\}$ を定義域とし $\sigma(x) = 2$, $\sigma(y) = 6$, $\sigma(z) = 3$ という値をとる**函数** σ のことです．ですから，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を定義する必要があるわけです．構造 $\mathfrak{A}$ が固定されている場合，これは $\{F, T\}$ すなわち $\{0, 1\}$ に値をとる φ と σ の函数です．この函数を φ に関する再帰で定義します．先ほどの $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y = x \cdot z)[\sigma]$ を求めるには，A の元 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x \cdot z)[\sigma]$ を函数 $\cdot_{\mathfrak{A}}$ を使って求め，それからその元が $\sigma(y)$ に等しいかを見る必要があります．一般に，論理式の真理値の定義に先だって，項 τ の値 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] \in A$ を定める必要があります．

定義 II.7.2　項 τ に対し，$V(\tau)$ とは，τ に出現する変数全体の集合とする．論理式 φ に対し，$V(\varphi)$ とは，φ に自由に出現する変数全体の集合とする．

定義 II.7.3　α が項あるいは論理式であったとして，α に対する A への**割り当て**とは，$V(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\sigma) \subseteq VAR$ と $\mathrm{ran}(\sigma) \subseteq A$ をみたす函数 σ のことである．

定義 II.7.4　$\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，$\mathcal{L}$ の項 τ と，τ に対する A への割り当て σ について A の要素 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ を次のように定める：

（1）　$x \in \mathrm{dom}(\sigma)$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma] = \sigma(x)$,

（2）　$c \in \mathcal{F}_0$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(c)[\sigma] = c_{\mathfrak{A}}$,

（3）　$f \in \mathcal{F}_n$ で $n > 0$ のとき

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(f\tau_1 \cdots \tau_n)[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \cdots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]).$$

とくに $V(\tau) = \emptyset$ のとき，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\emptyset]$ のことを $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$ と略記する．

ふたたび $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}$ を例にとると，

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x \cdot y)\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot_{\mathfrak{A}} \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y)\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot_{\mathfrak{A}} 6 = 12$$

となります．これには定義の条項 (3) と (1) と，演算 $\cdot_{\mathfrak{A}}$ の意味を順に用いています．「割り当て」の定義において，$\mathrm{dom}(\sigma)$ が $V(\tau)$ を真に含む集合であってもよいとしていたことに注意してください．そうしておかないと (3) のような条件を表明するのが厄介になることでしょう．とはいえ，帰納法によってたやすくわかるとおり

演習問題 II.7.5　$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ は $\sigma \restriction V(\tau)$ だけに依存する．すなわち，もしも $\sigma' \restriction V(\tau) = \sigma \restriction V(\tau)$ であれば $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma'] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ となる．

とくに $V(\tau) = \emptyset$ のときは任意の割り当て σ に対して $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\emptyset] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$ となります．ここで $\emptyset$ とは空な割り当てのことです．

定義 II.7.6　$\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，$\mathcal{L}$ の任意の原子論理式 φ とそれに対する A への任意の割り当て σ について $\{0, 1\}$（すなわち $\{F, T\}$）の要素 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を次のとおりに定める：

（1）　$p \in \mathcal{P}_0$ のとき，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p)[\sigma] = p_{\mathfrak{A}}$,

（2）　$p \in \mathcal{P}_n$ で $n > 0$ のとき，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p\tau_1 \cdots \tau_n)[\sigma] = T$ となることは $(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \cdots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]) \in p_{\mathfrak{A}}$ と同値,

（3）　$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(=\tau_1\tau_2)[\sigma] = T$ となることは $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ と同値.

この条項 (3) が別に必要になるのは，等号 $=$ が論理記号であって $\mathcal{P}$ に属する記号ではなく，$\mathfrak{A}$ によって $=$ に意味が割り当てられるわけではないからです．そうではなくて，$\tau_1 = \tau_2$ はいつでも，τ_1 と τ_2 が同一の対象であることを意味します．

論理式の値の定義をするために次の記法を定義しておくと有用です：

定義 II.7.7　$\sigma + (y/a) = \sigma \restriction (VAR \setminus \{y\}) \cup \{\langle y, a \rangle\}$.

すなわち

$$\begin{bmatrix} x \\ 4 \end{bmatrix} + (y/2) = \begin{bmatrix} x & y \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + (y/2) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

のように，y に a を割り当てることにして，そのために必要なら，σ が y に割り当てる値は捨ててしまうのです．

論理式 φ の真理値も項の値と同様，再帰的に求められます．

定義 II.7.8　$\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，$\mathcal{L}$ の任意の論理式 φ とそれに対する A への割り当て σ について，$\{0,1\}$ すなわち $\{F,T\}$ の要素 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を次のとおりに定める．

（1）　$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)[\sigma] = 1 - \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$.

（2）　$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\varphi\psi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\vee\varphi\psi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\rightarrow\varphi\psi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\leftrightarrow\varphi\psi)[\sigma]$ とは，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma]$ から $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ の真理値表（3 ページ，表 1）にもとづいて決める．

（3）　$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\exists y\varphi)[\sigma] = T$ となるのは，ある $a \in A$ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ となるときで，そしてそのときに限る．

（4）　$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall y\varphi)[\sigma] = T$ となるのは，すべての $a \in A$ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ となるときで，そしてそのときに限る．

また，$\mathfrak{A} \vDash \varphi[\sigma]$ とは $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = T$ のことである．$V(\varphi) = \emptyset$ のとき，すなわち φ が文のときには，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\emptyset]$ を $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ と略記し，また $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ とは $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = T$ のことであるとする．

条項(1)は，$\neg$ についての通常の真理値表を用いるというのともちろん同じことです．定義 II.7.7 が必要となったのは，φ において自由でない変数の値を σ が定めていることもありうるからです．そうした無関係な値は φ の真理値を求める過程で捨ててしまう必要があるかもしれません．たとえば有理数の体においては

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x = y \cdot y)\begin{bmatrix} x & y & z \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} = T \quad \text{なので}$$

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\exists y(x = y \cdot y))\begin{bmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = T$$

となります．

項の場合と同様，次のことは帰納法によってたやすく検証できます．

演習問題 II.7.9　$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ は $\sigma{\restriction}V(\varphi)$ だけに依存する．すなわち，もしも $\sigma'{\restriction}V(\varphi) = \sigma{\restriction}V(\varphi)$ であれば $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma'] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ である．

とくに φ が文のときはすべての σ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\emptyset] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ となります．

演習問題 II.7.10　149 ページの (C) と (D) を val の正式な定義にもとづい

て検証すること．

ここまでの話に関連したセマンティクス的概念のいくつかを書いてから，この章で証明する二つの主要結果を述べます．

定義 II.7.11 $\mathfrak{A}$ が語彙 $\mathcal{L}$ に対するある構造で，Σ が $\mathcal{L}$ の文のある集合のとき，$\mathfrak{A} \models \Sigma$ とは，すべての $\varphi \in \Sigma$ について $\mathfrak{A} \models \varphi$ であるということ．

通常は $\mathfrak{A} \models \Sigma$ と書いたら「$\mathfrak{A}$ は Σ を充足する」とか「$\mathfrak{A}$ は Σ のモデルである」とか読みます．たとえばセクション 0.4 で言ったように，群とは群の理論 GP のモデルのことです．

定義 II.7.12 Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合，ψ を $\mathcal{L}$ のある文とするとき，$\Sigma \models \psi$ とは $\mathfrak{A} \models \Sigma$ であるようなすべての $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A} \models \psi$ であることをいう．

日常言語ではこのことを ψ は Σ の**セマンティクス的な帰結**であるとか**論理的帰結**であるとか言います．記号 $\models$ には定義 II.7.11 と定義 II.7.12 で二つの異なる意味が盛られてしまいました．しかし $\models$ の左側にくるもの（$\mathfrak{A}$ か Σ か）が構造なのか文の集合なのかはいつだって文脈から明らかなので，曖昧さが発生する余地はありません．どちらの用法でもこの二重改札ゲート記号 $\models$ はセマンティクス（意味論）上の概念を表示しています．いっぽう，一重改札ゲート $\vdash$ はシンタクス（構文論）上の証明可能性をあらわすのです．$\Sigma \vdash \psi$ とは，セクション II.10 で定義される意味において，ψ の Σ からのフォーマルな証明があるということです．完全性定理（II.12.1）によって $\Sigma \vdash \psi$ と $\Sigma \models \psi$ は同値になります．

定義 II.7.13 Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合とするとき，Σ が**セマンティクス的に無矛盾である**あるいは**充足可能**である（これを $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ と書く）とは，ある構造 $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A} \models \Sigma$ となることである．セマンティクス的に無矛盾でないことを「セマンティクス的に矛盾する」という．

セクション II.10 で詳しく論じますが，フォーマルな証明論には，Σ から矛盾が証明できないと主張するシンタクス的な概念 $\mathrm{Con}_{\vdash}(\Sigma)$ があります．完全性定理から $\mathrm{Con}_{\vdash}(\Sigma)$ と $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ は同値になるので，それを確かめた

後は，添字を省いて単に $\mathrm{Con}(\Sigma)$ と書きます．

代数のテキストで論じられる通常の（群，環，体などの）公理系はふつう例となるモデルとともに提示されているので，無矛盾性は明らかです．セマンティクス的に矛盾する文の集合の人為的な例を書き出すのもたやすいことですが，矛盾の概念は次の補題に自然な形で登場します．証明は $\models$ の定義から明らかでしょう．

補題 II.7.14（背理法： **Reductio ad Absurdum**） Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合とし，ψ を $\mathcal{L}$ のある文とするとき，

（a） $\Sigma \models \psi$ は $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ がセマンティクス的に矛盾することと同値，

（b） $\Sigma \models \neg\psi$ は $\Sigma \cup \{\psi\}$ がセマンティクス的に矛盾することと同値．

この補題の証明論バージョン（補題 II.11.4）も成立します．これは，ψ を証明するために $\neg\psi$ から不合理な結果が導かれることをみる，すなわち，ψ が偽であったと仮定して矛盾を導く，という，インフォーマルな数学でよくある推論のステップに対応しています．こうした推論に reductio ad absurdum（背理法）というラテン語の名前をつけることは中世のスコラ哲学に始まるのですが，背理法の着想自体はアリストテレスにまでさかのぼります．アリストテレスがギリシャ語で書いた「分析論前書」の英語訳 [3] ですら，これらを reductio ad absurdum とか reductio ad impossibile といったラテン語で呼んでいるのです．

定理 II.7.15（コンパクト性定理） Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合とするとき，次のことが成り立つ．

（1） Σ のすべての有限部分集合がそれぞれセマンティクス的に無矛盾であるとき，Σ もセマンティクス的に無矛盾である．

（2） $\Sigma \models \psi$ のとき，ある有限の $\Delta \subseteq \Sigma$ について $\Delta \models \psi$ となる．

補題 II.7.14 を考えると，この (1) と (2) は同値です．この定理をセクション II.12 で証明します．

コンパクト性定理が $\models$ だけにかかわる「純モデル論的」定理であるいっぽうで，完全性定理はモデル論（$\models$）を証明論（$\vdash$）に関連づける結果です．わたくしたちは先に完全性定理を証明します（定理 II.12.1）．そうすればコ

ンパクト性定理は簡単に得られます．というのも，上記(2)の $\vDash$ を $\vdash$ に置きかえてしまえば，結果はフォーマルな証明が有限だという事実からすぐに出てくるからです．

レーヴェンハイム-スコーレム定理も「純モデル論的」な結果の一つで，これはモデルの濃度に関するものです．

定義 II.7.16　$\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ のある構造とし，その宇宙を A とするとき，$|\mathfrak{A}|$ とは $|A|$ のことだとする．

モデル $\mathfrak{A}$ のサイズに関する他の主張も実際には $|A|$ のことを言っているのです．たとえば「$\mathfrak{A}$ は無限モデルである」とは $|A|$ が無限だという意味です．

定理 II.7.17（レーヴェンハイム-スコーレム定理）　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合とし，すべての有限な n に対し Σ はサイズ n 以上（無限でもよい）のモデルをもつものとする．このとき，$\max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$ 以上の任意の基数 κ に対して，Σ はサイズ κ のモデルをもつ．

ここでの $|\mathcal{L}|$ は文字どおり論理外記号の個数という意味です．ここまでに出てきた例ではすべて，この個数は有限でした．この定理は，$|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$ である限り 1 階論理が無限濃度を識別できないことを意味するものです．Σ が無限モデルを一つでももてば，すべての無限濃度のモデルをもつからです．

語彙 $\mathcal{L}$ が可算でない場合には，条件 $\kappa \geq |\mathcal{L}|$ が本当に必要になります．たとえば $\mathcal{L} = \mathcal{F}_0 = \{ c_\alpha : \alpha < \lambda \}$ のときに $\Sigma = \{ c_\alpha \neq c_\beta : \alpha < \beta < \lambda \}$ としたとします．すると，Σ がサイズ κ のモデルをもつことと $\kappa \geq \lambda$ であることは同値です．この例はかなり人為的に見えますが，可算でない言語はモデル理論で有用であり，たとえばレーヴェンハイム-スコーレム定理の証明にも用いられています．先にコンパクト性定理を証明してモデルを構成する技法を手に入れてから，このレーヴェンハイム-スコーレム定理の証明を与えることにします．

有限なサイズだけは特別です．たとえば Σ がただ一つの文 $\forall x, y, z(x = y \vee y = z \vee z = x)$ からなるとすれば，サイズ 1 のモデルとサイズ 2 のモデルは存在しますが，他のサイズのモデルはありません．

コンパクト性定理の「コンパクト性」という言葉は位相空間のコンパクト性に関連しています．たとえば，

演習問題 II.7.18　集合 $2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れよう．チコノフの定理により，任意の集合 I について 2^I がコンパクト空間になる．このことから，命題論理のコンパクト性定理を直接証明しなさい．命題論理のコンパクト性定理とは，$\mathcal{L} = \mathcal{P}_0$ で Σ に属する文が変数も量化記号も等号も含まない場合に限った定理 II.7.15 (1) のことである．
[ヒント]　空間 $2^{\mathcal{P}_0}$ の点 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$ に対する構造と同一視しよう．$F_\varphi = \{\mathfrak{A} \in 2^{\mathcal{P}_0} : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ とおき，集合族 $\{F_\varphi : \varphi \in \Sigma\}$ が閉集合の有限交叉性をもつ族であることを示しなさい．　□

命題論理のコンパクト性定理はモデル理論以外のところにも応用されることがあります．次のような例がよく知られています．

演習問題 II.7.19　任意の対称的二項関係 $R \subseteq A \times A$ について，(A, R) を無向グラフとみた際に，函数 $c\colon A \to 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ が存在して $a \neq b$ かつ aRb であるときには必ず $c(a) \neq c(b)$ となっているならば，このグラフは**四彩色可能**であるということにしよう．A のすべての有限部分集合が R のもとで四彩色可能であったと仮定しなさい．このとき A が四彩色可能であることを証明しなさい．
[ヒント]　集合 A の各要素 a と番号 $j < 4$ ごとに命題記号 p_a^j が語彙 $\mathcal{L}$ に含めてあるとしなさい．そうすると彩色がみたすべき性質を命題論理の文の集合 Σ によって公理化できる．たとえば，$j < 4$ で $a \neq b$ で aRb のときには，$\neg(p_a^j \wedge p_b^j) \in \Sigma$ としなさい．これは a と b がグラフ内で結ばれているなら両者に同じ色が与えられることはない，という意味になる．ロジックを使わずチコノフの定理を用いることもできる．コンパクトな空間として $2^{\mathcal{P}_0}$ かあるいはこの場合ならもっと単純に 4^A が用いられる．　□

演習問題 II.7.20　ZF で考え，選択公理 AC を仮定せず，代わりに命題論理のコンパクト性定理を公理として仮定しなさい．このとき任意の集合 A が全順序づけできることを証明しなさい．
[ヒント]　$\mathcal{L} = \{p_{a,b} : a, b \in A\}$ として，$p_{a,b}$ が “$a < b$” を意味するもの

と考えなさい. □

注意書き ZF においてコンパクト性定理（CTh）は AC を弱めた形の一つになっています. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ が全順序づけできない ZF のモデルが存在するので, ZF が CTh を証明しないことがわかりますし, $ZF + CTh$ は AC どころか $\mathbb{R}$ が整列順序づけ可能であることも証明しません. CTh は ZF において命題論理のコンパクト性定理や完全性定理と同値になっています. また, 語彙 $\mathcal{L}$ が整列順序づけ可能である場合のコンパクト性定理や完全性定理は ZF で証明されますし, 有限の n と整列順序づけ可能な A について n^A がコンパクトであることも同様に ZF で証明できます. こうした話題について詳しくはイェックの [37] を参照しなさい.

演習問題 II.7.21 $\mathcal{L} = \{<\}$ としなさい. 各 n について, 2 つの変数 x と y のみを用いて書かれた文 φ_n が存在して, どんな全順序構造 $\mathfrak{A} = (A, <)$ においても, $\mathfrak{A} \models \varphi_n$ と $|A| \geq n$ が同値となることを示しなさい.
[ヒント] 論理式 $\varphi(x)$ が x だけを自由変数とし x と y だけを束縛変数としていて, x より小さい要素が n 個以上あるという意味のことを言っているとするなら, y だけを自由変数とし x と y だけを束縛変数として, y より小さい要素が $n+1$ 個以上あるという意味のことを主張する論理式 $\psi(y)$ を書き下せる. □

注意書き 変数の個数が制限された論理式で書けることを調べる**有限変数論理**についても研究されています. ここではもちろん, 一つの論理式の中で同じ変数を自由変数と束縛変数の両方に同時に用いてよいことが, 大変重要になってきます. くわしくはグローエの [31] を参照しなさい.

II.8 セマンティクスに関する概念の追加

ここにはセマンティクスに関する補助的な概念を集めてあります.

定義 II.8.1 ψ を語彙 $\mathcal{L}$ の論理式とするとき, ψ が**論理的に妥当**であるとは, すべての $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ と, $\mathfrak{A}$ における ψ に対するすべての割り当て σ について $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma]$ となることだとする.

文の空な集合については定義 II.7.11 によりすべての $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A} \models \emptyset$

となるので，文 ψ が論理的に妥当であることと $\emptyset \models \psi$ とは同値です．論理式 $x = x$ や文 $\forall x(x = x)$ は論理的に妥当です．わたくしたちの $\models$ の定義においては等号 $=$ はいつでも本当の同一性と解釈されるからです．たとえば $\forall xp(x) \to \forall yp(y)$ のように明らかに論理的に妥当な論理式が数多くある一方で，$p(x) \to \forall yp(y)$ のように論理的に妥当でないことが明らかな論理式も数多くあります．そうした簡単な例はたくさんあるものの，チャーチの示した定理によると，どの論理式が論理的に妥当であるのかを判定するアルゴリズムは存在しないのです（系 IV.5.19 を見なさい）．論理的に妥当な論理式の部分集合をなす**命題論理のトートロジー**（たとえば $p(x) \to \neg\neg p(x)$）については（真理値表を用いて）決定可能です．これについてはセクション II.9 を見なさい．

定義 II.8.2　φ と ψ を語彙 $\mathcal{L}$ の論理式とするとき，両者が**論理的に同値**であるとは，論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ が論理的に妥当であることだとする．

このことは，すべての $\mathfrak{A}$ とすべての σ について $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ と $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma]$ とが同値だというのと同じことです．たとえば $p(x) \vee q(x)$ と $q(x) \vee p(x)$ とは論理的に同値です．一つの論理式の全称閉包（定義 II.5.6）はすべて互いに論理的に同値となります．

補題 II.8.3　φ が論理式で文 ψ と χ がいずれも φ の全称閉包であるとすれば，ψ と χ とは論理的に同値である．

【証明】　$y_1, \cdots, y_k$（$k \geq 0$）が φ の自由変数のすべてであったとしよう．すると，ψ は $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \varphi$ の形で，各 y_i が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のどれかとして少なくとも 1 度は登場することになる．$\mathfrak{A} \models \psi$ とは，A の要素 $a_1, \cdots, a_k$ のすべてについて $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_k]$ となることと同じであるとわかる．χ についても同じことが言えるので $\mathfrak{A} \models \psi$ と $\mathfrak{A} \models \chi$ とは同値である．　□

とくに φ が文であれば φ は自分自身の全称閉包であり，φ の全称閉包はすべて φ 自身と論理的に同値となります．「論理式 φ **の**（the）全称閉包」という言い方で，普通は φ の全称閉包のうちのどれか（some）を意味するのですが，ほとんどの場合，どの全称閉包を採用しているのかは問題になりません．

相対化された論理的同値という概念もあります．

定義 II.8.4　φ と ψ が語彙 $\mathcal{L}$ の論理式で，Σ が $\mathcal{L}$ の文のある集合であるとき，φ と ψ が Σ **のもとで同値**とは，論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ の全称閉包が Σ のすべてのモデルにおいて真となることだとする．τ_1 と τ_2 を項とするとき，それらが Σ **のもとで同値**とは，$\mathfrak{A} \models \Sigma$ であるようなすべての $\mathfrak{A}$ と τ_1, τ_2 に対する A へのすべての割り当て σ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ となることだとする．

この概念は略記についての議論（セクション II.6）に登場しました．たとえば Σ に結合律が含まれているなら，二つの項 $x \cdot (y \cdot z)$ と $(x \cdot y) \cdot z$ は Σ のもとで同値ですから，Σ のモデルについて話している限り，xyz という略記法を用いるにあたって，それがどちらの項の省略形であるかを覚えていなくても済みます．二つの項 τ_1 と τ_2 が論理的に同値ということを，$\emptyset$ のもとでの同値として定義してもよいのですが，次の演習問題からわかるように，これは面白いものにはなりません．

演習問題 II.8.5　すべての $\mathfrak{A}$ とすべての σ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ であるなら，τ_1 と τ_2 は同一の項である．

代入の概念を次に検討しましょう．

定義 II.8.6　β と τ が項で x が変数であるとき，$\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ とは β における x のすべての**自由な**出現を τ に置き換えた結果として得られる項のことだとする．

このときもちろん $\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ が本当に項であることを検証せねばならないのですが，このことは β に関する帰納法でたやすく示されます．

たとえばセクション II.5 で触れた順序環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} = \{<, +, \cdot, -, 0, 1\}$ において，項 β として多項式 $x \cdot y$ をとれば $\beta(x \rightsquigarrow x+z)$ は $(x+z) \cdot y$ となります．ここではカッコが必要になりましたが，正式にポーランド式記法で書けば，β は $\cdot xy$ であり，x を文字どおり $+xy$ に置き換えることで $\beta(x \rightsquigarrow x+z)$ が $\cdot +xzy$ であることがわかるのです．セクション II.7 で述べた方法で項の値を計算するにあたっても，この代入はセマンティクス的に

「正しいふるまい」をしてくれます．たとえば有理数体上では

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta(x \rightsquigarrow x+z))\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta)\begin{bmatrix} x & y & z \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 12$$

となります．この第 2 の式においては x に与えられる値が $6 = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x+z)[1,5]$ に変更されているわけです．より一般に，与えられた割り当てについて $\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ を評価するには，$\sigma(x)$ の値を $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ に変更したうえで β を評価します．定義 II.7.7 の記号を用いて書けば，

補題 II.8.7　語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造 $\mathfrak{A}$ と，項 β と τ の両方に対する A への割り当て σ（定義 II.7.3）について，$a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ とするとき

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta)[\sigma + (x/a)]$$

が成り立つ．

【証明】　β に関する帰納法．　□

論理式についても同様に論じられます．

定義 II.8.8　φ を論理式，x を変数，τ を項とするとき，$\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ とは φ における x のすべての**自由な**出現を τ に置き換えた結果として得られる論理式のことだとする．

もちろんこのとき $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ が本当に論理式であることを検証する必要があるのですが，このことは φ に関する帰納法でたやすく示されます．

大まかに言えば $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ は x について言っていることを τ について言うものです．ここでも $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ を例にとりましょう．φ が $\exists y(y \cdot y = x+z)$ すなわち「$x+z$ は平方根をもつ」と主張する論理式だったとすると，$\varphi(x \rightsquigarrow 1)$ は $\exists y(y \cdot y = 1+z)$ すなわち「$1+z$ は平方根をもつ」と主張する論理式になります．ところが $\varphi(y \rightsquigarrow 1)$ は φ そのものです．というのも φ において y は束縛変数（ダミー変数）にすぎず，φ が y について何かを言っているわけではないからです．

項 τ に変数が含まれている場合には注意すべきことがあります．φ が $\exists y(x < y)$ であったとすると $\forall x\varphi$ が $\mathbb{R}$ において真になるので，論理式 $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ の全称閉包もすべて真であると期待されます．たとえば τ が 1 とか $z+z$ だった場合の $\exists y(1 < y)$ とか $\forall z\exists y(z+z < y)$ はいずれも $\mathbb{R}$ にお

いて真になります．ところが τ が $y+1$ だとすると $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ は文 $\exists y(y+1<y)$ となり，これは $\mathbb{R}$ においては偽です．ここでの問題は τ の変数 y が $\exists y$ に「捕縛」されて意味を変えてしまったことです．この問題を正確に表現するために次の定義をします．

定義 II.8.9 項 τ が論理式 φ 内で変数 x に対して**自由**であるとは，τ に出現する変数 y についての量化 $\exists y$ あるいは $\forall y$ のスコープ内に，x の自由な出現がまったくないことをいう．

代入される項が自由であれば，代入されても意図したとおりの意味をもちます．このことをフォーマルに言えば：

補題 II.8.10 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$ に対する構造，φ を $\mathcal{L}$ の論理式，τ を $\mathcal{L}$ の項，σ を φ に対する A への割り当て（定義 II.7.3）であり，かつ τ に対する A への割り当てでもあるとして，$a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ とおく．いま τ が φ 内で変数 x に対して自由であったとする．このとき $\mathfrak{A} \models \varphi(x \rightsquigarrow \tau)[\sigma]$ と $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma + (x/a)]$ とは同値である．

【証明】 φ に関する帰納法を用いる．基礎となる，φ が原子論理式の場合には補題 II.8.7 を用いる．また x が φ に自由に出現しない場合は $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ は φ そのものであり，σ が x に割り当てる値は無用である．この場合には帰納法の仮定を用いるまでもなく補題はただちに成立する．命題結合子についての帰納法のステップは素直にやればできる．そこであとは量化の扱い，すなわち φ が $\exists y\psi$ または $\forall y\psi$ であった場合を考える．φ に変数 x が実際に自由に出現しているものとしよう（そうでない場合は結果はただちに得られる）．ということは，変数 x と変数 y とは異なり，x は ψ に自由に出現し，y は τ に出現しない（というのも，τ は φ 内で x に対して自由なのだから）．帰納のステップは $\models$ の定義（II.7.8）からもはや明らかである．この定義では，$\sigma + (y/b)$ の形の割り当てをいろいろ調べることになるが，y が τ に出現しないことから，$a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma + (y/b)]$ となることに注意すればよい． □

代入をあらわす，もっと簡単な次の記法も頻繁に用います．

記法 II.8.11　置き換えられる変数が x であることが文脈から明らかである場合に $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ の略記として $\varphi(\tau)$ を用いる．この目的のため，議論の間は φ のことを $\varphi(x)$ とあらわすことがある．同様に φ を $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ とあらわしているときは，各変数 x_i のすべての自由な出現を τ_i に一斉に置き換えた結果として得られる論理式を $\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ とあらわす．

この "$\varphi(x)$" 方式はインフォーマルな数学で x の任意の性質をあらわすのによく用いられるものです．たとえばセクション 0.2 の $\exists! y \varphi(y)$ についての議論やセクション I.2 での内包公理とか置換公理などを思い出しましょう．また，初級微積分のテキストでも「函数 f」と言わずに「函数 $f(x)$」と言いますが，フォーマルには前者のほうがより正確なのです．上のような記法の用例をあげるなら，次のことが補題 II.8.10 からわかります．

系 II.8.12　τ が $\varphi(x)$ 内で x に対して自由であるとすれば，$\forall x \varphi(x) \to \varphi(\tau)$ と $\varphi(\tau) \to \exists x \varphi(x)$ は論理的に妥当である．

【証明】　補題 II.8.10 と，論理的妥当と $\models$ 記法の定義（II.8.1 と II.7.8）による．□

他の例として，順序環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} = \{<, +, \cdot, -, 0, 1\}$ を用いて実数について語っている場面で「$\varphi(x, y)$ を $x + 1 = y$ としよう」と言ったとします．このとき $\varphi(1+1, 1+(1+1))$ は $(1+1)+1 = 1+(1+1)$ であり，これは $\mathbb{R}$ において真です．また $\varphi(1+(1+1), 1+1)$ は $\mathbb{R}$ において偽です．ここでの構造 $\mathfrak{A}$ は $(\mathbb{R}; <, +, \cdot, -, 0, 1)$ です．二つの命題 $\mathfrak{A} \models \varphi(1+1, 1+(1+1))$ と $\mathfrak{A} \models \varphi[2, 3]$ は実質的に同じことを言っているのですが，フォーマルには異なります．前者は文 $\varphi(1+1, 1+(1+1))$ が $\mathfrak{A}$ において真だと言っているのに対し，後者は $\mathfrak{A}$ において変数 x に値 2，変数 y に値 3 を割り当てたとき，論理式 $x + 1 = y$ が真になる，と言っています．この二つが結局同じ意味になる，という事実は次のように一般化されます．

補題 II.8.13　$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$ に対する構造，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $\mathcal{L}$ の論理式で $x_1, \cdots, x_n$ の他には自由変数をもたないものとする．また $\tau_1, \cdots, \tau_n$ を $\mathcal{L}$ の項とし，これらは自由変数を含まないものとする．$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i)$ を a_i と書こう．すると，$\mathfrak{A} \models \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ と $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ とは同値である．

【証明】　次の n 個の $\Longleftrightarrow$ はいずれも補題 II.8.10 による．

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)[a_1] \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(x_1, x_2, \cdots, \tau_n)[a_1, a_2] \\ &\Longleftrightarrow \cdots \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)[a_1, a_2, \cdots, a_n]. \ \Box\end{aligned}$$

ここまでは議論する構造に対して語彙 $\mathcal{L}$ を固定して考えてきましたが，ある固定された言及の範囲を $\mathcal{L}$ を変えながら検討してゆくこともできます．たとえば実数の全体を体 $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}; 0, 1, +, \cdot, -, i)$ と考えたいかもしれません．そのときは語彙は $\mathcal{L}_1 = \{0, 1, +, \cdot, -, i\}$ となるわけです（体の公理については以下の例 II.8.23 を見なさい）．ところが $\mathbb{R}$ をアーベル群としてだけ扱いたいかもしれません．この場合の語彙は $\mathcal{L}_0 = \{0, +, -\}$ で，$\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}_0 = (\mathbb{R}, 0, +, -)$ と書かれます．このとき $\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}_0$ は $\mathfrak{A}$ の**縮小**であるといい，また $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}_0$ の**拡張**であるといいます．圏論の言葉で言えば，体の圏からアーベル群の圏への**忘却函手**のことを言っていることになるでしょう．というのも，群 $\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}_0$ では乗法演算のことを**忘れ去っ**ているからです．

以下で $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$ という記法を用いるときはいつでも，どの記号も $\mathcal{L}_0$ と $\mathcal{L}_1$ で同じタイプをもつということを含めて言っています．一つの議論の中で異なるタイプの記号にわたくしたちが同じ名前をつけることは決してありません．縮小と拡張の一般的な定義を与えるには定義 II.7.1 の用語を用います．

定義 II.8.14　$\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$ とし，$\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ を $\mathcal{L}_1$ に対する構造とするとき，$(A, \mathcal{I}{\restriction}\mathcal{L}_0)$ のことを $\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}_0$ と書く．$\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}_0$ は $\mathfrak{A}$ の**縮小**と呼ばれ，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}_0$ の**拡張**と呼ばれる．

定義 II.7.1 の $\mathcal{I}$ は $\mathcal{L}_1$ を定義域とする函数であったことを思い出しましょう．ここでは実際にはその函数を $\mathcal{L}_0$ に制限しているのです．

まず $\mathcal{L}_0$ に対する構造を考えてその拡張を求める，ということもよくあります．たとえば $(A; 0, +, -)$ がアーベル群だったとして，これがある体の加法の群になるのはどんなときか，と問うことがあります．これは実のところ代数学の（やさしい）問題ですが，わたくしたちのモデル理論の言葉では

$(A; 0, +, -)$ が $(A; 0, 1, +, \cdot, -, i)$ の形の，体の公理をみたす拡張をもつかどうか，と問うていることになります（例 II.8.23 を見なさい）．

次の補題は，語彙を拡張しても $\Sigma \vDash \psi$（定義 II.7.12）とか $\mathrm{Con}_{\vDash}(\Sigma)$（定義 II.7.13）といった概念が変らないことを示しています．そういう理由でわたくしたちはこれまで $\Sigma \vDash_{\mathcal{L}} \psi$ とか $\mathrm{Con}_{\vDash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ というように $\mathcal{L}$ を明記してはこなかったのです．

補題 II.8.15　Σ を $\mathcal{L}_0$ の文のある集合，ψ を $\mathcal{L}_0$ のある文とし，$\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$ であったとしよう．このとき，次のことは互いに同値である：

（α）$\mathfrak{A}_0 \vDash \Sigma$ をみたすすべての $\mathcal{L}_0$-構造 $\mathfrak{A}_0$ について $\mathfrak{A}_0 \vDash \psi$ となる．

（β）$\mathfrak{A}_1 \vDash \Sigma$ をみたすすべての $\mathcal{L}_1$-構造 $\mathfrak{A}_1$ について $\mathfrak{A}_1 \vDash \psi$ となる．

さらに次の二つも互いに同値である：

（a）$\mathfrak{A}_0 \vDash \Sigma$ をみたす $\mathcal{L}_0$-構造 $\mathfrak{A}_0$ が存在すること．

（b）$\mathfrak{A}_1 \vDash \Sigma$ をみたす $\mathcal{L}_1$-構造 $\mathfrak{A}_1$ が存在すること．

【証明】　(b) $\Rightarrow$ (a)：$\mathfrak{A}_1 \vDash \Sigma$ とすると，$\mathcal{L}_0$ の文の真偽は $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_1 \restriction \mathcal{L}_0$ で同じなので $\mathfrak{A}_1 \restriction \mathcal{L}_0 \vDash \Sigma$ でもある．

(a) $\Rightarrow$ (b)：$\mathfrak{A}_0$ を $\mathfrak{A}_0 \vDash \Sigma$ であるような任意の $\mathcal{L}_0$-構造とする．この $\mathfrak{A}_0$ を $\mathcal{L}_1$-構造 $\mathfrak{A}_1$ にどのように拡張しても，やはり $\mathfrak{A}_1 \vDash \Sigma$ となる．

(α) $\Leftrightarrow$ (β) も同様である．□

注意書き II.8.16　この補題の証明は本質的にはとるに足りないようなものですが，定義 II.7.1 で定めた，構造が空ではないという事実に依拠しています．A が空であることを認めたとしても基本的な定義はできますが，補題 II.8.15 は成立しなくなってしまいます．たとえば ψ を $\forall x p(x) \to \exists x p(x)$ とすると，空集合においては $\forall x p(x)$ が真で $\exists x p(x)$ が偽なので，ψ は偽となります．ところがそれ以外のすべての構造において ψ は真になります．いま $\mathcal{L}_0 = \{p\}$ とし，c を定数記号として $\mathcal{L}_1 = \{p, c\}$ とすれば，$\{\neg\psi\}$ は $\mathcal{L}_0$ の文としてはセマンティクス的に無矛盾であるけれども $\mathcal{L}_1$ の文としてはセマンティクス的に矛盾するという，なにやら病理的な状況になってしまいます．先ほどの (a) $\Rightarrow$ (b) の証明では，定数記号が A の要素として解釈されねばならないことにより，空な構造を $\mathcal{L}_1$-構造に拡張することはできません．この病理は，モデル理論においていつでも宇宙が空でないと要請する

のはなぜか説明してくれます．

縮小と拡張においては，A を固定して $\mathcal{L}$ を小さくしたり大きくしたりしました．このことを，$\mathcal{L}$ を固定して A を小さくしたり大きくしたりする部分構造と拡大の議論と混同してはなりません．部分構造の概念は，代数学でいう部分群とか部分環といった概念の一般化です．

定義 II.8.17　$\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ と $\mathfrak{B} = (B, \mathcal{J})$ を $\mathcal{L}$ に対する構造とする．このとき $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ とは $A \subseteq B$ であって $\mathfrak{A}$ の函数と述語が $\mathfrak{B}$ における対応する函数および述語の制限になっていることだとする．詳しくいうと，

☞ $f \in \mathcal{F}_n$ で $n > 0$ のとき $f_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{B}} \restriction A^n$ である．

☞ $p \in \mathcal{P}_n$ で $n > 0$ のとき $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}} \cap A^n$ である．

☞ $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $c_{\mathfrak{A}} = c_{\mathfrak{B}}$ である．

☞ $p \in \mathcal{P}_0$ のとき $2 = \{0, 1\} = \{F, T\}$ の要素として $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}}$ である．

このとき，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$ の**部分構造**（または**部分モデル**）と呼ばれ，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の**拡大**と呼ばれる．

定数と函数の場合は，$c_{\mathfrak{A}}$ は A の要素でなくてはならないし，$f_{\mathfrak{A}}$ は A への函数でなくてはならないのです．ですから，$\mathfrak{B}$ から出発して B の空でない部分集合 A を好き勝手にとったのでは，A を $\mathfrak{B}$ の部分構造にすることは一般にはできません．たとえば $\mathfrak{B} = (B; \,\cdot\,, i, 1)$ が群で，セクション II.5 でやったとおり群論の言語が $\mathcal{L} = \{\,\cdot\,, i, 1\}$ であったとしましょう．$A \subseteq B$ だったとして，A が乗法と逆元のもとで閉じていて 1 を含まなければ，A を $\mathfrak{B}$ の部分構造にすることはできません．これはつまり A が部分群でなければならないということです．また，縮小あるいは拡張にともなって，どの部分集合が部分構造をなすか，ということも変化します．たとえば，言語を $\mathcal{L}_0 = \{\cdot\}$ に縮小してもセクション 0.4 で述べた群の公理を書きあらわすことはできますが，$(B; \,\cdot\,)$ の部分構造というと部分**半群**のこと，つまり乗法のもとで閉じているけれども逆元のもとで閉じているとは限らないもののことになります．

群と群の間の同型写像，環と環の間の同型写像の概念がありますが，これは任意の構造へとたやすく一般化できます．

定義 II.8.18　$\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ と $\mathfrak{B} = (B, \mathcal{J})$ とはいずれも同じ言語 $\mathcal{L}$ に対する構造であったとする．$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ の上への**同型写像**とは，$\Phi\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ であって構造を保つもののことである．くわしく言うと，

☞ $f \in \mathcal{F}_n$ で $n > 0$ のとき，すべての $a_1, \cdots, a_n \in A$ について $f_{\mathfrak{B}}(\Phi(a_1), \cdots, \Phi(a_n)) = \Phi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n))$ である．

☞ $p \in \mathcal{P}_n$ で $n > 0$ のとき，すべての $a_1, \cdots, a_n \in A$ について $(\Phi(a_1), \cdots, \Phi(a_n)) \in p_{\mathfrak{B}} \iff (a_1, \cdots, a_n) \in p_{\mathfrak{A}}$ である．

☞ $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $c_{\mathfrak{B}} = \Phi(c_{\mathfrak{A}})$ である．

☞ $p \in \mathcal{P}_0$ のとき $2 = \{0, 1\} = \{F, T\}$ の要素として $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}}$ である．

$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ の上への同型写像が存在するとき，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$ と**同型**であるといって $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ と書く．

この定義はまた定義 I.7.14 を一般化するものでもあります．定義 I.7.14 は $\mathcal{L} = \{<\}$ の場合に与えられたものでした．

公理の集合 Σ はありうるすべての命題の真偽を決定してしまうときに**完全**であるといいます．

定義 II.8.19　Σ を $\mathcal{L}$ の文のある集合とするとき，Σ が（$\mathcal{L}$ に関して）**完全**であるとは，Σ がセマンティクス的に無矛盾であって，しかも $\mathcal{L}$ のすべての文 φ について $\Sigma \models \varphi$ または $\Sigma \models \neg\varphi$ のどちらかが成立することだとする．

言語 $\mathcal{L}$ として Σ に用いられている記号の全体を用いているとわかっている場合には単に「Σ は完全である」と言います．通常，それより大きな $\mathcal{L}$ に関しては Σ は完全ではありません．

演習問題 II.8.20　Σ を $\mathcal{L}$ の文のある集合とし，$\mathcal{L}' \supsetneq \mathcal{L}$ であって $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ には少なくとも 1 個の述語記号が含まれるとする．このとき Σ は $\mathcal{L}'$ に関して完全ではありえない．

［ヒント］　$\exists x_1 \cdots \exists x_n p(x_1, \cdots, x_n)$ の形の文 φ を考えなさい．　□

完全な Σ の例として，人為的であるかもしれませんが，与えられた構造の理論が挙げられます．

定義 II.8.21　$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，$\mathfrak{A}$ **の理論** $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ とは $\mathfrak{A} \models \varphi$ であるような $\mathcal{L}$ の文 φ 全体のなす集合のことだとする．

補題 II.8.22　$\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ は（$\mathcal{L}$ に関して）完全である．

【証明】　$\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ であるから，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ はセマンティクス的に無矛盾である．そして $\mathcal{L}$ のすべての文 φ について $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ または $(\neg\varphi) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ である．□

公理の完全な集合という意味での完全な理論の自然な例は代数学に多く見られます．そのいくつかをセクション II.13 で述べます．その他の例も [13] や [46] のようなモデル理論のテキストで見ることができます．

次の例も代数学からのものですが，代数的な理論の形式化について一つ追加しておくべき論点を例示してくれます．

例 II.8.23　$\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, -, i\}$ とする．ただし $-$ は加法の逆元を与える単項演算，i は乗法の逆元を与える単項演算とする．Σ を次の $\mathcal{L}$ の文の集合としよう．これは体の公理系である：

（1）　$+, 0, -$ について書かれた群の公理（セクション II.5 の γ_1，$\gamma_{2,1}$，$\gamma_{2,2}$）．

（2）　$\cdot$ と 1 について書かれた結合法則と単位元の法則（セクション II.5 の γ_1 と $\gamma_{2,1}$）．

（3）　交換法則：$\forall x, y[x \cdot y = y \cdot x]$ と $\forall x, y[x + y = y + x]$．

（4）　分配法則：$\forall x, y, z[x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)]$．

（5）　乗法の逆元の法則：$\forall x[x \neq 0 \to x \cdot i(x) = 1]$．

（6）　$i(0) = 0$．

（7）　$0 \neq 1$．

公理(5)はすべての**非零元**についてその逆数の存在を主張しています．代数学においてインフォーマルには「1/0 は定義されない」と言いますが，わたくしたちのモデル理論は部分的に定義された函数を認めないので，$i(x)$ もすべての x に対して定義されていることになり，ただわたくしたちは逆数が存在する場合（すなわち $x \neq 0$ の場合）に $i(x)$ が x の逆数をあらわすことを述べるばかりです．$i(0)$ の値は「無用」なのですが，公理(6)でその値を

指定することで，通常の体の同型の概念とモデル理論における同型写像の概念との対応がつくようにしています．同型写像には，定義 II.8.18 によれば $\Phi(i_{\mathfrak{A}}(0_{\mathfrak{A}})) = i_{\mathfrak{B}}(0_{\mathfrak{B}})$ であることが要請されます．公理(6)がないと，3 つの要素からなる体を考えても，$i(0)$ の値が 0 か 1 か 2 かによって互いに同型でない 3 つの体があることになってしまいます．さらに公理(7)は 1 要素だけからなる「くだらない」体を排除しています．

例 II.8.24　$\mathcal{L}'$ を $\{0, 1, +, \cdot, -, i, <\}$ すなわち $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} \cup \{i\}$ としよう．順序体の公理は例 II.8.23 の $\mathcal{L}$ における公理(1)–(7)に次の公理を加えたものとする：

（8）　$<$ について書かれた全順序づけの公理（定義 I.7.2）.

（9）　$<$ が加法で保たれる：$\forall x, y, z[x < y \rightarrow x + z < y + z]$.

（10）　$<$ が乗法で保たれる：$\forall x, y, z[x < y \wedge 0 < z \rightarrow x \cdot z < y \cdot z]$.

公理(5)と(6)を省いた $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ における公理の集合は単位元をもつ順序環の公理をなす.

すべての変数（すなわち *VAR* の要素）をこれまでの定義においてどれも対等に扱ってきたため，それらがすべて「本質的に等価」である，というアイデアを，次の二つの演習問題が例示しています.

演習問題 II.8.25　z と w を異なる二つの変数とする．φ（あるいは $\varphi(z)$）を $\mathcal{L}$ の論理式とする．w が φ 内で変数 z に対して自由であることと，φ に w が自由に出現しないことを仮定しよう．通常どおり $\varphi(z \rightsquigarrow w)$ を $\varphi(w)$ と書こう．このとき z が $\varphi(w)$ 内で変数 w に対して自由であることと，$\varphi(w)$ に z が自由に出現しないことを確認しなさい．$\varphi(z)$ と $(\varphi(w))(w \rightsquigarrow z)$ とが同一であることを確認しなさい．$\forall z\varphi(z)$ と $\forall w\varphi(w)$ が論理的に同値であることを示しなさい．$\exists z\varphi(z)$ と $\exists w\varphi(w)$ が論理的に同値であることを示しなさい.

[ヒント]　系 II.8.12 を見なさい．$\forall z\varphi(z) \rightarrow \varphi(w)$ は論理的に妥当，したがってまた $\forall z\varphi(z) \rightarrow \forall w\varphi(w)$ も論理的に妥当である．　□

143 ページで注意したとおり，束縛変数をつけかえることは論理式の意味を変えません.

演習問題 II.8.26　φ を $\mathcal{L}$ の論理式とし z を任意の変数とする．w を φ 内にまったく出現しない変数とする．φ 内の z のすべての束縛された出現を w に置き換えた結果として得られる論理式を φ' とする．z の自由な出現には手を加えない．このとき φ と φ' とは論理的に同値である．

[ヒント]　φ に関する帰納法を用いる．基礎になるのは φ がまったく量化記号を含まない場合で，このときは何も言うことはない．また，帰納のステップもたいていの場合は簡単だが，少しばかりやっかいなのが $\forall z\psi(z)$ の場合だ．帰納法の仮定として，ψ と ψ' とは同値である．したがって，$\forall z\psi(z)$ と $\forall z\psi'(z)$ も同値である．ここで $\psi'(z)$ は ψ' そのものであり，$\psi'(w)$ は $\psi'(z \rightsquigarrow w)$ の略記とする．さて，φ' とは $\forall w\varphi'(w)$ のことで，これは演習問題 II.8.25 により $\forall z\psi'(z)$ と同値である．　□

こうした束縛変数の書き換えはインフォーマルな論理的表現においては暗黙のうちになされます．たとえば 2 ページにおいて $\exists! y\varphi(y)$ とは

$$\exists y[\,\varphi(y) \wedge \forall z(\varphi(z) \to z = y)\,] \qquad (\text{☆})$$

の短縮形だと言いました．これはフォーマルには不正確です．もしも $\varphi(y)$ を $\forall z[y \leq z]$ とすれば，$\exists! y\varphi(y)$ という主張は $(\omega; \leq)$ において真なのに，(☆) によれば，これが

$$\exists y[\,\forall z[y \leq z] \wedge \forall z[\forall z[z \leq z] \to z = y]\,]$$

となり，こちらは $(\omega; \leq)$ において偽となります．(☆) を用いるときには $\varphi(y)$ に出現しない z を選ぶか，あるいは z の束縛された出現を他の変数 w に置き換えた $\varphi'(y)$ を作ってこの φ' に (☆) を適用するのだと考えねばなりません．そうすれば，(☆) にあらわれる z が $\exists z$ や $\forall z$ によって「捕縛される」こともなくなります．上の例の場合なら $\forall w[y \leq w]$ を φ' とすればよいのです．

同様に，微積分で $f(y) = \int_0^1 \cos(yz)\,dz$ と定義したとすれば，$f(z^2)$ とは $\int_0^1 \cos(z^2 w)dw$ のことであって $\int_0^1 \cos(z^3)dz$ のことではないということは誰でもわかっています．

同様に，こんにちのコンピュータ言語では束縛変数（すなわちサブルーチン内のローカル変数）を同じ名前のグローバル変数と混同してはならないことをコンパイラが知っているのです．

II.9　トートロジー

インフォーマルに言えば，**命題論理のトートロジー**（あるいは単に**トートロジー**）とは $=$ や $\forall$ や $\exists$ の意味を参照することなく命題結合子の意味だけからそれが論理的に妥当だということがわかるような論理式のことです．たとえば $p(x) \to p(x)$ はトートロジーですが，$\forall xp(x) \to \forall yp(y)$ とか $x = x$ が論理的に妥当であることを検証するにあたっては $\forall$ や $=$ の意味を知らねばならないので，これらはトートロジーではありません．

定義 II.9.1　**基本論理式**とは（ポーランド記法であらわしたとき）命題結合子から始まっていないような論理式のことである．

たとえば $\forall xp(x) \to \forall yp(y)$（ポーランド記法で $\to\forall xpx\forall ypy$）は基本論理式ではなくて，二つの基本論理式 $\forall xpx$ と $\forall ypy$ の間の含意の式です．「トートロジー」の定義においては，こうした基本論理式をそれ以上解析されない互いに異なったアトムと考えます．どのような論理式も基本論理式を命題結合子でつなぎ合わせて作られることに注意しましょう．

定義 II.9.2　$\mathcal{L}$ に対する**真偽割り当て**とは，$\mathcal{L}$ の基本論理式全体の集合から $\{0, 1\}$ すなわち $\{F, T\}$ への函数 v のことだとする．そのような函数 v が与えられたとして $\{F, T\}$ の要素 $\bar{v}(\varphi)$ を次のように再帰的に定める：

（1）　$\bar{v}(\neg\varphi) = 1 - \bar{v}(\varphi)$

（2）　$\bar{v}(\wedge\varphi\psi), \bar{v}(\vee\varphi\psi), \bar{v}(\to\varphi\psi), \bar{v}(\leftrightarrow\varphi\psi)$ は $\bar{v}(\varphi)$ と $\bar{v}(\psi)$ からそれぞれ $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ の真理値表（3 ページの表 1）に従って定められる．

すべての真偽割り当て v に対して $\bar{v}(\varphi) = T$ となるような論理式 φ のことを**命題論理のトートロジー**という．

この定義には定義 II.7.8 の $\models$ の定義との類似性はあるものの，ここでは命題結合子の意味だけを考えています．φ がトートロジーであるかどうか調べるには，φ を構成する基本論理式への T と F の割り当てのすべてをチェックすればよいのです．たとえば φ が $\forall xp(x) \to \forall yp(y)$ であったとして，$v(\forall xp(x)) = T$ で $v(\forall yp(y)) = F$ となる v がありえます．このことは $\forall xp(x)$ と $\forall yp(y)$ とが（実際には論理的に同値ではありますが）異なる論理式であることによって可能になるのです．このとき $\bar{v}(\varphi) = F$ となるの

で，φ はトートロジーではないのです．いっぽう $p(x) \to p(x)$ は一つの基本論理式 $p(x)$ だけから作られていて，この基本論理式に v が T を割り当てることも F を割り当てることもありえますが，いずれにしても $\bar{v}(p(x) \to p(x)) = T$ となるので，$p(x) \to p(x)$ はトートロジーなのです．

定義 II.9.2 と定義 II.7.8，それから論理的妥当性の定義（II.8.1）とを合わせることで，次のことがわかります．

演習問題 II.9.3　命題論理のトートロジーはいずれも論理的に妥当である．

II.10　フォーマルな証明

セクション 0.4 とセクション II.2 で予告していたフォーマルな証明の理論をこれから述べます．セクション II.2 で言ったとおり，実用的な枠組みでの使いやすさではなく，定義と数学的な解析の容易なシステムをめざします．証明の「実用的」な理論についてのコメントと関連する文献の紹介はセクション II.19 にあります．

わたくしたちの証明の理論では，推論の規則として**モーダス・ポーネンス**

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

だけを認めることにします．インフォーマルには，この規則は φ と $\varphi \to \psi$ が証明できたなら，ψ と結論づけてよい，ということを意味します．フォーマルには，モーダス・ポーネンスは「フォーマルな証明」の定義（II.10.3）に組み込まれてしまっています．まず，いくつかの「妥当性が明らかな」主張を選び出して「論理の公理」とすることから始めましょう．

定義 II.10.1　**論理の公理**とは，次のリストにあるタイプの論理式の全称閉包（定義 II.5.6）であるような文のことだとする．ここで x, y, z およびそれらに添字をつけたものは任意の変数をあらわすものとする．

（1）　すべての命題論理のトートロジー

（2）　x が φ において自由でないときの $\varphi \to \forall x\varphi$

（3）　$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

（4）　項 τ が φ 内の変数 x に対して自由であるときの $\forall x\varphi \to \varphi(x \rightsquigarrow \tau)$

（5）　項 τ が φ 内の変数 x に対して自由であるときの $\varphi(x \rightsquigarrow \tau) \to \exists x\varphi$

（6） $\forall x \neg\varphi \to \neg\exists x\varphi$

（7） $x = x$

（8） $x = y \leftrightarrow y = x$

（9） $x = y \wedge y = z \to x = z$

（10） $n > 0$ で f を $\mathcal{L}$ の n 変数函数記号とするときの $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (f(x_1, \cdots, x_n) = f(y_1, \cdots, y_n))$

（11） $n > 0$ で p を $\mathcal{L}$ の n 変数述語記号とするときの $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow p(y_1, \cdots, y_n))$

演習問題 II.10.2　論理の公理はすべて論理的に妥当である．

[ヒント]　むずかしい部分はすでに片付いている．トートロジーについては演習問題 II.9.3 を，(4)や(5)のタイプの公理については系 II.8.12 を見なさい．□

定義 II.10.3　Σ を $\mathcal{L}$ の文のある集合とするとき，Σ からの**フォーマルな証明**とは $\mathcal{L}$ の文の空でない列 $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ であって，各 i について，$\varphi_i \in \Sigma$ であるか，φ_i が論理の公理であるか，あるいは何らかの $j, k < i$ について φ_j と φ_k からモーダス・ポーネンスによって φ_i が導かれる（つまり φ_k が $\varphi_j \to \varphi_i$ である）か，いずれかになっているもののことだとする．この列は末尾の文 φ_n **の**フォーマルな証明と呼ばれる．

定義 II.10.4　Σ を $\mathcal{L}$ の文のある集合とし，φ を $\mathcal{L}$ のある文とするとき，$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ とは，Σ からの φ のフォーマルな証明が存在するという意味である．

補題 II.10.5（健全性）　$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であれば $\Sigma \vDash \varphi$ である．

【証明】　$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ かつ $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$ であると仮定しよう．示すべきことは $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ である．φ の Σ からのフォーマルな証明を $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ とすると φ_n は φ である．i に関する帰納法で $\mathfrak{A} \vDash \varphi_i$ となることを示そう．三つの場合が考えられる．$\varphi_i \in \Sigma$ の場合は $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$ であることを用いる．φ_i が論理の公理である場合は演習問題 II.10.2 を用いる．この二つの場合は帰納法の仮定を用いるまでもない．モーダス・ポーネンスが用いられたときは，$\mathfrak{A} \vDash \varphi_j \to \varphi_i$ と $\mathfrak{A} \vDash \varphi_j$ から $\mathfrak{A} \vDash \varphi_i$ が導かれることに注意すればよい．□

わたくしたちのフォーマルな証明の定義はいたってシンプルですが，論理の公理のリストだけは別です．どの言明をこのリストに載せるかには多少の任意性があり，テキストごとに異なっています．このリストについては重要な性質が三つあります．

（1） すべての論理の公理が論理的に妥当であること．したがって**健全性**が成立すること．

（2） **完全性**を確立するのに十分なだけの公理をリストに入れてあること．

（3） 語彙 $\mathcal{L}$ が有限の場合，論理の公理の集合が決定可能であること．

健全性とは先ほどの補題 II.10.5 のことです．完全性はその逆の主張で $\Sigma \models \varphi$ ならば $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ だ，というものです．完全性定理は（定理 II.12.1 やセクション 0.4 やセクション II.7 において言及したときのように），しばしば「$\Sigma \models \varphi$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ が互いに必要十分である」という形で述べられます．しかし，つい先ほど見たとおり，このうち健全性のほうはとてもやさしくて，もう一方の方向が定理の肝になるのです．

語彙 $\mathcal{L}$ が有限であれば，シンタクス的な対象をコンピュータに入力するデータとみなすことができます．(3) によってコンピュータは与えられた論理式の有限列がフォーマルな証明であるかどうか否かのチェックができることになりますし，また原理的にはコンピュータ自身がフォーマルな証明を生成することもできます．ただし実際にフォーマルな証明を扱うコンピュータのプログラムにおいては，ここでわたくしたちが考えているものとはかなり違った証明の体系を採用しています（セクション II.19 を見なさい）．

論理的に妥当な文をすべて論理の公理にしてしまったほうがよりエレガントになると思われるかもしれません．そうすれば (1) は明らかになり，(2) の証明もいくぶん簡単になるでしょうが，チャーチの定理（系 IV.5.19）により (3) が損なわれます．

ここで $\Sigma \vdash \varphi$ と書かず $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と書いているのは，ひょっとするとこの概念が $\mathcal{L}$ に依存するかもしれないという懸念のためです．いま Σ と φ は $\mathcal{L}$ で書かれていて，$\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$ となっているものとしましょう．$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$ でありフォーマルな証明に $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ の記号が用いられているかもしれません．このとき必ず $\mathcal{L}$ の記号のみを用いたフォーマルな証明が存在すること，した

がって $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ が同値となることは，本当なのですが，ただちに明らかというわけにはいきません．直接証明（演習問題 II.11.13）は少々めんどうです．わたくしたちの正式な証明（補題 II.12.21）は完全性定理からくるもので，$\Sigma \vDash \varphi$ という概念が $\mathcal{L}$ に依存しないことによるのです．

セクション I.2 で集合論の公理を列挙したさいにも言ったことですが，代数学と論理学の慣例に従って，等号 $=$ に関する基本的なことがらは論理に関する事項であって，理論を公理化するときにわざわざ述べるには及ばないものと考えます．たとえば $\emptyset \vdash \forall x(x = x)$ であるのはこの式がタイプ 7 の論理の公理であるからです．また外延性の公理の逆も論理に関する事項で，$\emptyset \vdash \forall x, y(x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$ となります（演習問題 II.11.14 を見なさい）．また，$\emptyset \vdash \exists x(x = x)$ で，宇宙は空ではありません（演習問題 II.10.6）．ただし，わたくしたちはこれを集合論の公理 0 として明言しておきました．代数学においては時おり空な構造（空な半群など）を認めることがあるので，混乱を未然に防ごうと考えたからです．

フォーマルな証明は文だけから作られており，任意の論理式からなるわけではありません．インフォーマルな数学的な論証においては，自由変数（すなわち文字）が議論に登場したとき，それが全称量化されているか存在量化されているかは読者が文脈から判断せねばならないのです．

このセクションの最後に，フォーマルな証明の例を二つあげましょう．$p \wedge q \vdash p$ を示すには

(0)	$p \wedge q \to p$	これはトートロジー
(1)	$p \wedge q$	これは与えられた式
(2)	p	(0) と (1) とモーダス・ポーネンス

いくつか注意を述べます．フォーマルに言えばここでは $\Sigma = \{p \wedge q\}$ で，$\mathcal{L}$ が少なくとも二つの命題記号 p と q を含む語彙である場合に $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ を示しているわけです．定義 II.10.3 によればここでのフォーマルな証明というのは文の並び $(p \wedge q \to p, p \wedge q, p)$ のことであって，その右の注釈は含みません．注釈なしの文の並び $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ が任意に与えられたとして，これがフォーマルな証明になっていうかどうかは，各 φ_i がそこに合法的に置かれていることの 12 とおりの条件（11 のタイプの論理の公理とモーダス・ポー

ネンス）のいずれかをみたすことをチェックすればいいので，決定可能です．

つまらない自明な文でも，フォーマルな証明を書き出すとなると面倒である場合が多いのです．図 II.1 では $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \vdash \forall y p(y)$ を示しています．$\forall x p(x)$ を導くのは 5 行で済んでいます．先ほどの例で示した証明におけるモーダス・ポーネンスに対応する段階を量化記号の内側で行なうためにタイプ 3 の公理に訴えています．そのあとの 6 行は変数 “x” を “y” に替えるために必要なのです．ここで行 0 と行 5 の式は，実際に論理の公理とされるのが定義 II.10.1 の式の**閉包**だということを示す例になっています．

(0)	$\forall x[p(x) \wedge q(x) \to p(x)]$	トートロジー
(1)	$\forall x[p(x) \wedge q(x) \to p(x)] \to$	
	$(\forall x[p(x) \wedge q(x)] \to \forall x p(x))$	タイプ 3 の公理
(2)	$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \to \forall x p(x)$	(0) と (1) とモーダス・ポーネンス
(3)	$\forall x[p(x) \wedge q(x)]$	与えられた式
(4)	$\forall x p(x)$	(2) と (3) とモーダス・ポーネンス
(5)	$\forall y[\forall x p(x) \to p(y)]$	タイプ 4 の公理
(6)	$\forall y[\forall x p(x) \to p(y)]$	
	$\to (\forall y \forall x p(x) \to \forall y p(y))$	タイプ 3 の公理
(7)	$\forall y \forall x p(x) \to \forall y p(y)$	(6) と (5) とモーダス・ポーネンス
(8)	$\forall x p(x) \to \forall y \forall x p(x)$	タイプ 2 の公理
(9)	$\forall y \forall x p(x)$	(8) と (4) とモーダス・ポーネンス
(10)	$\forall y p(y)$	(7) と (9) とモーダス・ポーネンス

図 II.1　$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \vdash \forall y p(y)$

インフォーマルには $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ から $\forall y p(y)$ を導くのはなんでもなくて，

> $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ を仮定しなさい．任意の対象 c を考えなさい．このとき $p(c) \wedge q(c)$ が成立する．したがって，トートロジーにより $p(c)$ が得られる．ここで c は任意であったから $\forall y p(y)$ である．

というようになされます．セクション II.11 において，こうしたインフォーマルな証明から直接にフォーマルな証明を構成できるような証明の規則を導入します．184 ページを見なさい．

演習問題 II.10.6　文の空な集合 $\emptyset$ からの $\exists x(x=x)$ のフォーマルな証明を書き下すこと．ここまでの例と同様，証明に出現する文を書くにあたっては省略記法を用いてよいが，証明の各段階を省略してはいけない．

［ヒント］ $\forall x(x=x \to \exists x(x=x))$ はタイプ 5 の公理．これにタイプ 3 の公理とモーダス・ポーネンスを用いて $\forall x(x=x) \to \forall x \exists x(x=x)$ を得る．そしてタイプ 7 の公理を用いて $\forall x \exists x(x=x)$ を得る．それからタイプ 4 の公理である $\forall x \exists x(x=x) \to \exists x(x=x)$ を適用する．この最後の公理は，空な構造では成立しない． □

II.11　証明の構成への戦略

前から言っているとおり，わたくしたちの証明の理論は大きな規模の数学を定式化するという用には適していません．それでも，このセクションでは，インフォーマルな数学で用いられる論法がフォーマルな証明論の中で模倣できることを示すために，いくらかの一般的な原理を確立します．あとで完全性定理の証明を述べるさいに，ここで得る結果が補題として用いられます．

まず，$\varphi \to \psi$ を示すために φ が真であったと仮定して ψ を導き出すというインフォーマルな規則をとりあげましょう．これはフォーマルには次のようになります．

補題 II.11.1（演繹定理）　$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$ と $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ とは同値である．

【証明】　まず $\Rightarrow$ について．モーダス・ポーネンスを用いる．すなわち，Σ からの $\varphi \to \psi$ の証明が与えられたとして，そのあとに φ を書き，その次にモーダス・ポーネンスによって ψ を書き足せば，$\Sigma \cup \{\varphi\}$ からの ψ の証明が得られる．

次に $\Leftarrow$ について．$\psi_0, \cdots, \psi_n$ が $\Sigma \cup \{\varphi\}$ からの ψ の証明であったとしよう．すると ψ_n は ψ である．i に関する帰納法によって $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_i$ を示すことにする．そのためにすべての $j < i$ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_j$ であったと仮定しよう．ここで話は三つの場合に分かれるが，そのうち二つは帰納法の仮定を必要としない．

<u>第 1 の場合</u>，ψ_i は論理の公理か Σ のメンバーである．とすると，Σ からの証明の中では ψ_i を好きなところに置いてよい．そこで，次の 3 行は Σ

からの $\varphi \to \psi_i$ の証明になっている．

(0)	ψ_i	
(1)	$\psi_i \to (\varphi \to \psi_i)$	これはトートロジー
(2)	$\varphi \to \psi_i$	(0) と (1) とモーダス・ポーネンスによる

<u>第 2 の場合</u>，ψ_i が φ である．このときは $\varphi \to \psi_i$ はトートロジーであるからそれ 1 行だけで証明になっている．

<u>第 3 の場合</u>，ある $j, k < i$ について ψ_i が ψ_j と ψ_k からモーダス・ポーネンスによって得られる．つまり ψ_k が $\psi_j \to \psi_i$ である．このとき，

(0)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_j$	帰納法の仮定
(1)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to (\psi_j \to \psi_i)$	帰納法の仮定
(2)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \psi_j) \to [(\varphi \to (\psi_j \to \psi_i))$ $\to (\varphi \to \psi_i)]$	トートロジー
(3)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} [\varphi \to (\psi_j \to \psi_i)] \to (\varphi \to \psi_i)$	(2) と (0) とモーダス・ポーネンス
(4)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_i$	(3) と (1) とモーダス・ポーネンス

第 1 の場合ではフォーマルな証明が明示的に与えられた（行番号とコメントをとり除いてしまえばいい）．いっぽう第 3 の場合で示したのは $\varphi \to \psi_j$ と $\varphi \to \psi_k$ のフォーマルな証明から $\varphi \to \psi_i$ のフォーマルな証明を作り出す方法である． □

次に，背理法（またの名を矛盾による証明）をとりあげましょう．これは φ を証明するために φ が偽であったと仮定して矛盾を導き出すものです．補題 II.7.14 で背理法のセマンティクス版（モデル論的なバージョン）を扱ったことを思い出しましょう．証明論的なバージョン（補題 II.11.4）を述べる前に，そもそもフォーマルな証明の理論において矛盾とは何のことかを言っておかなければなりません．

定義 II.11.2 語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が**シンタクス的に矛盾する**とは，$\mathcal{L}$ のある文 φ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ の両方が成立することをいう．このことを $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と書く．矛盾しないとき，無矛盾である（$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$）という．

セマンティクス的無矛盾性について述べた定義 II.7.13 と今度の定義をよく比較してみなければなりません．ほどなく完全性定理（II.12.1）を証明して，$\mathcal{L}$ が Σ に出現する記号をすべて含む語彙でありさえすれば $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ が同値になることを示します．それ以後は，添字を省いて $\mathrm{Con}(\Sigma)$ と書くことになります．ひとまずここでは "無矛盾" という言葉のちょっとした言いかえをします．

補題 II.11.3　語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合 Σ について次は互いに同値である：

（a）$\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$,

（b）$\mathcal{L}$ のすべての文 ψ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

【証明】　(b) ⇒ (a) は言うまでもない．(a) ⇒ (b) については $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ がトートロジーであることを使い，モーダス・ポーネンスを 2 度適用すればよい．□

カントールはおそらく，自分の集合論から導かれるパラドクス（73 ページ）が「普通の」数学に関わるものではなかったという理由で，その矛盾は軽度の矛盾だと感じていたことでしょう．しかしフォーマルな論理には軽度の矛盾なんてものはなくて，ひとたび矛盾が導かれてしまうと，何でも証明できてしまいます．

補題 II.11.4　**（背理法）**　語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合 Σ と，$\mathcal{L}$ の文 φ について，

（1）$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$ は同値.

（2）$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ と $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$ は同値.

【証明】　まず (1) について，"矛盾" の定義から ⇒ はすぐにわかる．⇐ をみるには，補題 II.11.3 によって $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であるから演繹定理（II.11.1）によって $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to \varphi$ である．ところが $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ はトートロジーでなので，モーダス・ポーネンスによって $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ である．(2) も同様であり，こちらは演習問題とする．□

この議論と，それに先立ついくつもの議論で，トートロジーを書いてモーダス・ポーネンスに訴えました．このことを一般的に述べたのがトートロ

ジー推論（補題 II.11.6）です．

定義 II.11.5　文 ψ が $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ から**トートロジーで得られる**というのは，$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi$ が命題論理のトートロジーであるときにいう．

補題 II.11.6（トートロジー推論）　$\psi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が $\mathcal{L}$ の文で ψ が $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ からトートロジーで得られるなら，$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \vdash \psi$ である．

【証明】　このとき $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi) \cdots))$ もまたトートロジーであるから，モーダス・ポーネンスを n 回行なえばよい．　□

この論法は次の事実とともに用いられることが多いのですが，こちらはフォーマルな証明をつなぎ合わせるだけでたやすく示せます．

補題 II.11.7（$\vdash$ の推移性）　$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \vdash \psi$ であり，各 $i = 1, \cdots, n$ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_i$ であれば $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ である．

たとえば $\varphi \to \psi_i$ は $\varphi \to \psi_j$ と $\varphi \to (\psi_j \to \psi_i)$ からトートロジーで得られるのですから，補題 II.11.6 と II.11.7 を用いてよかったのなら，補題 II.11.1 の証明の第 3 の場合などは，$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_j$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to (\psi_j \to \psi_i)$ とから $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_i$ を得る，とだけ言うこともできたわけです．また，ψ は φ と $\varphi \to \psi$ からトートロジーで得られるのですから，モーダス・ポーネンスによる推論がすべて実質的に補題 II.11.6 に含まれてしまいます．

次は量化記号を扱う規則です．インフォーマルな数学における推論では，普段は量化記号を明示しませんが，次の規則のインフォーマル版によって暗黙のうちに量化が処理されているのです．

補題 II.11.8（量化記号の規則）

UI：$\forall x \varphi(x) \vdash_{\mathcal{L}} \varphi(\tau)$　　　**UG**：$\dfrac{\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi(c)}{\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall x \varphi(x)}$

EI：$\dfrac{\Sigma \cup \{\varphi(c)\} \vdash_{\mathcal{L}'} \psi}{\Sigma \cup \{\exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi}$　　　**EG**：$\varphi(\tau) \vdash_{\mathcal{L}} \exists x \varphi(x)$

ここで Σ は $\mathcal{L}$ の文からなる集合であり，$\varphi(x)$ は x 以外の自由変数をもたない $\mathcal{L}$ の論理式であるものとする．$\varphi(\tau)$ が文となるように，UI と EG における項 τ には変数が含まれないものとする．UG と EI における c は $\mathcal{L}$ に含まれない定数記号で，$\mathcal{L}'$ とは $\mathcal{L} \cup \{c\}$ のことであるものとする．EI に

おける ψ は $\mathcal{L}$ の文であるものとする．

証明の前に解説しましょう．U は “Universal”（全称の），E は “Existential”（存在の）をあらわし，I は “Instantiation”（個別化），G は “Generalization”（一般化）をあらわします．UI の規則（全称個別化）は，$\forall x\varphi(x)$ が真なら個別の $\varphi(\tau)$ も真としてよかろう，というインフォーマルな推論のステップに対応するものです．同様に，EG の規則（存在一般化）は，ある項 τ に関して $\varphi(\tau)$ が示されたことから $\exists x\varphi(x)$ を知るというインフォーマルな推論のステップに対応します．UI と EG はインフォーマルには「明らかに正しい」といえます．というのも，$\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ と $\varphi(\tau) \to \exists x\varphi(x)$ とは論理的に妥当な文だからです．

UG と EI にあらわれた横棒はある種の “…ならば…” で，UG（全称一般化）は $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi(c)$ であれば $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\varphi(x)$ でもあると主張していることになります．UI と比較すると UG は厄介です．通常は個別の $\varphi(c)$ から $\forall x\varphi(x)$ へと一般化することは許されないからです．UG は，インフォーマルな証明における「ところが c は任意であったから」に対応しているのです．たとえば，実数についての議論で $\exists y(y^3 = x)$ を $\varphi(x)$ として $\forall x\varphi(x)$ を証明したかったとします．このときは次のように言うことでしょう：c を任意の実数としなさい．中間値の定理を適用すれば $y^3 - c$ が根をもつこと，すなわち $\varphi(c)$ が示される．ところが c は任意であったから，$\forall x\varphi(x)$ が得られる．このインフォーマルな論法が万人に受けいれられているために，解析学の教科書で量化記号を目にすることは稀なのです．ところがそのおかげで初学者はどの文字が「任意の実数」をあらわしているのかわからず，混乱しがちです．ここでは Σ が語彙 $\mathcal{L}$ を用いて書かれているという前提が大切で，したがって公理系 Σ は定数 c についていっさい言及していないのです．先ほどのインフォーマルな例における Σ は，実数についての既知の基本的な事実の集合をあらわしていることでしょう．ですから Σ には記号 0 が含まれていて $\Sigma \vdash 0 + 0 = 0$ となっていることでしょうが，だからといってこのことから $\Sigma \vdash \forall x(x + x = x)$ と結論するわけにはいきません．記号 0 について Σ があからさまに言及しているからです．

EI（存在個別化）の規則は「…となるような c を一つ固定する」というインフォーマルな語法に対応しています．量化記号に関する 4 つの規則の用例

として，$\exists x \forall y p(x,y) \to \forall y \exists x p(x,y)$ を証明する場面を考えましょう．インフォーマルにはこうなります：$\exists x \forall y p(x,y)$ が真だったとして，$\forall y p(c,y)$ となる c を一つ固定しよう（EI）．任意の対象 d について $p(c,d)$ となる（UI）．したがって $\exists x p(x,d)$ である（EG）．ところがここで d は任意の対象であったから（UG），$\forall y \exists x p(x,y)$ である．この各ステップをフォーマルに書き出そうとすれば，次のように規則の順番が変更されます．

(0)	$p(c,d) \vdash_{\mathcal{L}''} p(c,d)$	トートロジー
(1)	$p(c,d) \vdash_{\mathcal{L}''} \exists x p(x,d)$	(0) と EG
(2)	$\forall y p(c,y) \vdash_{\mathcal{L}''} \exists x p(x,d)$	(1) と UI
(3)	$\forall y p(c,y) \vdash_{\mathcal{L}'} \forall y \exists x p(x,y)$	(2) と UG
(4)	$\exists x \forall y p(x,y) \vdash_{\mathcal{L}} \forall y \exists x p(x,y)$	(3) と EI
(5)	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \exists x \forall y p(x,y) \to \forall y \exists x p(x,y)$	(4) と演繹定理

ここで $\mathcal{L} = \{p\}$，$\mathcal{L}' = \{p,c\}$，$\mathcal{L}'' = \{p,c,d\}$ です．ステップ (2) において $\vdash$ の推移性が暗に用いられています．ステップ (0) は補題 II.11.6 によると言ってもよかったのですが，$\vdash$ の定義からすぐにわかることでもあります．この 6 行はフォーマルな証明になっているわけではなくて，むしろ，フォーマルな証明の存在を保証するデモンストレーションというべきものです．量化記号に関する規則の正当性をこのあとで検証します．この検証も，前の演繹定理の証明も，$\exists x \forall y p(x,y) \to \forall y \exists x p(x,y)$ のフォーマルな証明を実際に書き出す方法を教えてくれるという意味で構成的なものですが，そうしてできあがる証明は 6 行よりずっと長くなることでしょう．この証明を手直しして，$\forall y \exists x p(x,y) \to \exists x \forall y p(x,y)$ を得ようと安直に試みてもうまくいきません．$p(c,d) \vdash p(c,d)$ から出発するのはよいとして，その次に $p(c,d) \vdash \forall y p(c,y)$（UG の誤用：$p(c,d) \vdash$ のところで d に言及している）あるいは $\exists x p(x,d) \vdash p(c,d)$（EI の誤用：$\vdash p(c,d)$ のところで c に言及している）のどちらにも進めません．すでにお気づきのとおり，この文はどのみち証明できないのです．演習問題 II.11.16 をご覧なさい．

もう一つ例をあげます．$\forall x \neg\varphi(x) \to \neg\exists x \varphi(x)$ は論理の公理になっています．この公理と補題 II.11.8 から次のような類似の量化記号の操作を導出できます．

例 II.11.9　$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \neg\forall x\psi(x) \to \exists x\neg\psi(x)$.

【証明】

(1)	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\neg\neg\psi(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg\psi(x)$	タイプ 6 の公理
(2)	$\neg\neg\psi(c) \vdash_{\mathcal{L}'} \psi(c)$	トートロジー推論
(3)	$\forall x\neg\neg\psi(x) \vdash_{\mathcal{L}'} \psi(c)$	(2) と UI
(4)	$\forall x\neg\neg\psi(x) \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\psi(x)$	(3) と UG
(5)	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\neg\neg\psi(x) \to \forall x\psi(x)$	(4) と演繹定理
(6)	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \neg\forall x\psi(x) \to \exists x\neg\psi(x)$	(1) と (5) とトートロジー推論

ただし $\mathcal{L}'$ とは $\mathcal{L} \cup \{c\}$ のこと．(2) と (6) では実は補題 II.11.6 も用いている．□

演習問題 II.11.10　$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \neg\forall x\psi(x) \leftrightarrow \exists x\neg\psi(x)$ を示しなさい．

【補題 II.11.8 の証明】　規則 UI と EG については，モーダス・ポーネンスと，文 $\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ や $\varphi(\tau) \to \exists x\varphi(x)$ が論理の公理（前者はタイプ 4，後者はタイプ 5）であるという事実に訴えるだけでよい．

規則 UG について．$\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ を，語彙 $\mathcal{L}'$ での Σ からの $\varphi(c)$ のフォーマルな証明とする．とくに φ_n は $\varphi(c)$ である．この証明に一度も出現しない変数 y を考え，φ_i における c のすべての出現を y に書き換えて得られる論理式を $\psi_i(y)$ とする．とくに $\psi_n(y)$ は $\varphi(y)$ である．i に関する帰納法によって $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y\psi_i(y)$ を示すことにしよう．すると，$i = n$ の場合に $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y\varphi(y)$ となる．いっぽう

(0)	$\forall y\varphi(y)$	得られた式
(1)	$\forall x[\forall y\varphi(y) \to \varphi(x)]$	タイプ 4 の公理
(2)	$\forall x[\forall y\varphi(y) \to \varphi(x)]$ $\to (\forall x\forall y\varphi(y) \to \forall x\varphi(x))$	タイプ 3 の公理
(3)	$\forall x\forall y\varphi(y) \to \forall x\varphi(x)$	(2) と (1) とモーダス・ポーネンス
(4)	$\forall y\varphi(y) \to \forall x\forall y\varphi(y)$	タイプ 2 の公理
(5)	$\forall x\forall y\varphi(y)$	(4) と (0) とモーダス・ポーネンス
(6)	$\forall x\varphi(x)$	(3) と (5) とモーダス・ポーネンス

によって $\forall y\varphi(y)\vdash_{\mathcal{L}}\forall x\varphi(x)$ なので，目的は果たされることになる．

さてその帰納法は三つの場合にわかれる．このうち第 1 の場合を見れば，新しい変数 y と上に示した不恰好なフォーマルな証明がどうして必要なのかがわかる．第 1 と第 2 の場合は，帰納法の仮定を必要としない．

<u>第 1 の場合</u>，φ_i が論理の公理である．このときは $\forall y\varphi_i(y)$ が同じタイプの論理の公理であることがたやすく確かめられる．変数 y が φ_i に出現しないという事実に訴えるのはこのときだ．たとえば φ_i が $\forall z\exists xp(z,x)\to\forall xp(c,x)$ というタイプ 4 の公理だったとしよう．すると $\psi_i(y)$ は $\forall z\exists xp(z,x)\to\forall xp(y,x)$ であり，ψ_i の全称閉包である $\forall y\psi_i(y)$ がタイプ 4 の公理になっている．ここで φ_i に出現する変数 x を使いまわすわけにいかなかったのは，φ_i において定数 c を変数 x に書き換えた結果が $\forall z\exists xp(z,x)\to\exists xp(x,x)$ となり，これが（x が $\forall xp(z,x)$ における z への代入に関して自由でないため）論理の公理とならないばかりか，論理的に妥当ですらないからだ．

<u>第 2 の場合</u>，φ_i が Σ に属する．このときは φ_i は定数 c を用いていないので，$\psi(y)$ は文 φ_i そのものであり，$\varphi_i\to\forall y\psi_i(y)$ はタイプ 2 の論理の公理なので $\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\forall y\psi_i(y)$ である．

<u>第 3 の場合</u>，ある $j,k<i$ について φ_i が φ_j と φ_k からモーダス・ポーネンスで得られる，つまり φ_k が $\varphi_j\to\varphi_i$ である．このときは

(0)	$\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\forall y\psi_j(y)$	帰納法の仮定
(1)	$\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\forall y(\psi_j(y)\to\psi_i(y))$	帰納法の仮定
(2)	$\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\forall y(\psi_j(y)\to\psi_i(y))$ $\to(\forall y\psi_j(y)\to\forall y\psi_i(y))$	タイプ 3 の公理
(3)	$\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\forall y\psi_j(y)\to\forall y\psi_i(y)$	(2) と (1) とモーダス・ポーネンス
(4)	$\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\forall y\psi_j(y)$	(3) と (0) とモーダス・ポーネンス

となるのでよい．

残る規則 EI を UG の適用例に書き換えることで検証する．$\Sigma\cup\{\varphi(c)\}\vdash_{\mathcal{L}}\psi$ と仮定すると $\neg\operatorname{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma\cup\{\varphi(c),\neg\psi\})$ を得る．背理法（補題 II.11.4）によって $\Sigma\cup\{\neg\psi\}\vdash_{\mathcal{L}'}\neg\varphi(c)$ を得る．そこで UG によって $\Sigma\cup\{\neg\psi\}\vdash_{\mathcal{L}}\forall x\neg\varphi(x)$ である．こうして $\neg\operatorname{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma\cup\{\neg\psi,\neg\forall x\neg\varphi(x)\})$ となるから

（ふたたび背理法によって）$\Sigma \cup \{\neg\forall x \neg\varphi(x)\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ である．

ここで $\forall x \neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists x\varphi(x)$ は（タイプ 6 の）論理の公理であり，$\neg\forall x \neg\varphi(x)$ は $\exists x\varphi(x)$ からこの公理とトートロジー推論（補題 II.11.6）によって得られる．以上のことと $\vdash$ の推移性によって $\Sigma \cup \{\exists x\varphi(x)\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ を得る．□

175 ページの図 II.1 でフォーマルな証明をあからさまに書き記して $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \vdash \forall y p(y)$ を示したときには，全称量化の内側でモーダス・ポーネンスに相当することを実行するためにタイプ 3 の公理を使うのだと指摘しました．先ほどの規則 UG の証明においても第 3 の場合のモーダス・ポーネンスの段階の正当性を示すのにタイプ 3 の公理を使っています．こうして得られた規則を用いれば，$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \vdash \forall y p(y)$ はもはや自明となります．175 ページで述べたインフォーマルな証明を反映させて

(0)	$p(c) \wedge q(c) \vdash_{\mathcal{L}'} p(c)$	トートロジーから
(1)	$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \vdash_{\mathcal{L}'} p(c)$	(0) と UI
(2)	$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \vdash_{\mathcal{L}} \forall y p(y)$	(1) と UG

と言えばよいのです．インフォーマルな証明の《ここで c は任意であったから》に相当する箇所で UG が用いられています．

演習問題 II.11.11　$\mathcal{L} = \{\ \cdot\ \}$ とし $GP = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ をセクション 0.4 に示した群論の公理系とする．左消約法則が GP から証明できることを示しなさい：

$$GP \vdash_{\mathcal{L}} \forall x, y, z\big[\, x \cdot y = x \cdot z \to y = z\,\big]$$

［ヒント］ 次のようなインフォーマルな論法を量化記号の規則の助けを借りてフォーマルに書きなおすこと．a と b と c を固定し，$ab = ac$ であったとする．γ_2 の $\exists u$ によって存在が保証された単位元を e と書くことにすれば（EI），$\forall x[xe = ex = x] \wedge \forall x \exists y[xy = yx = e]$ である．このとき $\exists y[ay = ya = e]$ なので（UI） $ad = da = e$ をみたすような d がとれる（EI）．あとは $b = eb = da \cdot b = d \cdot ab = d \cdot ac = da \cdot c = ec = c$ となる．この式変形は等号の公理の（UI による）個別化と公理 γ_1 の結合法則の（UI による）2 とおりの個別化を用いてフォーマルに書きなおせる．演繹定理により，$ab =$

$ac \to b = c$ を得る．ところが a と b と c は任意の群要素だったから（UG）$\forall x, y, z[xy = xz \to y = z]$ である．

実際にはわたくしたちのシンタクスは等号の連鎖を認めていないので，上で $ad = da = e$ と書いたのは実は $ad = da \wedge da = e$ の略記（セクション II.6 参照）であり，この式から，次に必要となる $da = e$ をトートロジー推論を用いて導く．もし他の場面（もしかしたら右消約法則の証明）で $ad = e$ が必要になれば，タイプ 9 の論理の公理とトートロジー推論を用いて導出することになる．□

規則 UG の次のような特別の場合は書き出しておく価値があるでしょう．

補題 II.11.12　文の集合 Σ と文 φ が語彙 $\mathcal{L}$ で書かれているとし，定数記号 c を加え $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ としよう．$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$ であったとする．このとき $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ である．

【証明】　規則 UG から $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\varphi$ が得られる．ところが φ が文であることから $\forall x\varphi \to \varphi$ はタイプ 4 の論理の公理である．□

このことは次のように一般化されます．

演習問題 II.11.13　文の集合 Σ と文 φ が語彙 $\mathcal{L}_0$ で書かれていて，$\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$ かつ $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ であったとする．このとき $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_0} \varphi$ であることを，構成的に示しなさい．

［ヒント］ $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ を Σ からの φ のフォーマルな証明とする．そこで φ_n は φ である．この証明には $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_0$ に属する記号が用いられていてもよいものとする．ここで“構成的に示す”というのは，この証明とは別に $\mathcal{L}_0$ の記号のみを用いた証明を構成する手順をあからさまに示しなさい，ということだ．構成的でなくてよいのなら，この結果は完全性定理が示されてしまえばトリヴィアルなものになる（補題 II.12.21）．

二段構えでやるのが簡明でよいだろう．まず $\mathcal{L}_0$ が一つの定数記号 c を含んでいると仮定する．各 φ_i に対して，$\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_0$ に属する述語記号 p からなる原子論理式 $p(\tau_1, \cdots, \tau_m)$ をすべて $\forall x(x = x)$ に書き換え，$\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_0$ に属する函数記号 f からなる項 $f(\tau_1, \cdots, \tau_m)$ をすべて c に書き換えることによって φ'_i を得よう．すると，φ が $\mathcal{L}_0$ の文であることから φ'_n もやはり φ

である．列 $\varphi'_0, \cdots, \varphi'_n$ はフォーマルな証明そのものではないが，帰納法によって $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_0} \varphi'_i$ を示すのはたやすい．

あとは，$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 \cup \{c\}$ の場合を考えればよいが，これには補題 II.11.12 が使える．□

この演習問題の結果は補題 II.8.15 に対する証明論的なアナロジーになっています．補題 II.8.15 では $\mathcal{L}_0$-構造 $\mathfrak{A}_0$ を $\mathcal{L}_1$-構造 $\mathfrak{A}_1$ にどのように拡張してもよいと言いましたが，今回は $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_0$ の述語は何に対しても真になると解釈し，$\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_0$ の函数はいつでも値 c をとると解釈しろ，とはっきり指定しています．

証明論をめぐるわたくしたちの議論はここまでです．これで完全性定理を証明するのにじゅうぶんな準備ができました．モデル理論の観点からは，$\vdash$ についての詳細な議論は蛇足ですし，$\vdash$ を $\models$ に置き換えるとトリヴィアルなものになってしまう演習問題 II.11.13 や II.11.11 といった事実にも関心は向きません．フォーマルな証明をコンピュータのプログラムなどに実際に出力させることに興味をおもちなら，セクション II.19 を見てください．演習問題 II.11.11 を細部にわたってやってみて，それがどれほど面倒くさいかを知れば，証明を出力するプログラムはどれもここで論じたのとはまったく異なった証明の理論を用いているはずだと納得がいったことでしょう．次の二つの演習問題を解くためには，当然のことですが，完全性定理を使ってはいけません．

演習問題 II.11.14　$\emptyset \vdash \forall x, y(x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$ を示しなさい．
[ヒント]　$\forall x, y, z[z = z \wedge x = y \to (z \in x \leftrightarrow z \in y)]$ はタイプ 11 の論理の公理である．□

演習問題 II.11.15　$ZF \vdash \exists y \forall x(x \notin y)$ を示しなさい．インフォーマルな証明はセクション I.6 で定義 I.6.8 の正当性の検証として与えてある．

演習問題 II.11.16　$\emptyset \nvdash \forall y \exists x p(x, y) \to \exists x \forall y p(x, y)$ を示しなさい．
[ヒント]　この主張の成立しない 2 要素モデルをみつけ健全性（補題 II.10.5）を適用しなさい．□

注意書き　$\Sigma \vdash \varphi$ であることは，ここまでに述べた証明の構成への戦略を用いて確かめることができますが，$\Sigma \nvdash \varphi$ であることを確かめる方法は，ほとんどの場合，演習問題 II.11.16 のようにモデル論的であり，フォーマルな証明の定義の組合せ論的分析の方法をとることはまずありません．演習問題 II.11.16 では有限主義的な推論（これについてはセクション III.1 を見なさい）で用が足ります．有限モデルを用いて結果を反駁できるからです．これと同様に，6 個の元からなる非アーベル群が存在するので，群論の公理系から $\forall x, y[xy = yx]$ は証明できません．多くの場合 $\Sigma \nvdash \varphi$ を確かめるには無限モデルが必要になり，この場合，その議論全体が ZFC の中で定式化されているとみなさねばなりません．たとえば ZFC での議論として，冪集合の公理はそれ以外の ZFC の公理から証明できないのですが，これは冪集合の公理を除くすべての ZFC の公理をみたすモデル $H(\aleph_1)$ において冪集合の公理が偽であることからわかるのです（演習問題 I.14.22 および補題 II.17.15）．メタ理論における有限的推論と ZFC の中で定式化された有限的でない結果の区別について詳しくはセクション III.2 を見なさい．

II.12　完全性定理

この定理はセマンティクスに関する概念である $\models$ とシンタクスに関する概念である $\vdash$ を関連づける結果です．無矛盾性に関する結果とも証明可能性に関する結果とも考えられます．

定理 II.12.1（完全性定理）　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とするとき，

（1）$\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ と $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ が同値，

（2）$\mathcal{L}$ の任意の文 φ について，$\Sigma \models \varphi$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ が同値．

これが証明できてしまえば，$\vdash$ や Con についた添字は省いてしまうことができます．

定理 II.12.1 の二つの同値性は実際のところ同じことの言い換えであり，しかも，いずれも片側の向きはすでに証明が済んでいます．まだ証明し残している部分に注力するために，次の補題を立てます．

補題 II.12.2（主補題）　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ で

あると仮定する．このとき $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ である．

補題 II.12.3　補題 II.12.2 から定理 II.12.1 が得られる．

【証明】　(2) の $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Longrightarrow \Sigma \models \varphi$ すなわち**健全性**のほうはすでに証明してある（補題 II.10.5）．このことから (1) の健全性の方向 $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma) \Longrightarrow \mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ が次のようにして示される．$\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ であれば，ある文 φ について $\Sigma \vdash_{\vdash} \varphi$ かつ $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ となる（定義 II.11.2）．すると $\Sigma \models \varphi$ かつ $\Sigma \models \neg\varphi$ ということになるが，このとき $\models$ の定義（II.7.12）により Σ のモデルは存在しえない．すなわち $\neg\,\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ である．

これで補題 II.12.2 を仮定すれば (1) の両方向が得られることがわかる．すると (2) についても

$$\begin{aligned} \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi &\iff \neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) \\ &\iff \neg\,\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) \iff \Sigma \models \varphi \end{aligned}$$

となって両方向が示される．このうち一つ目の $\iff$ は補題 II.11.4（背理法）により，二つ目は (1) を用い，三つ目は $\models$ の意味を考えれば当然である（あるいは補題 II.7.14 を見なさい）．　□

では主補題の証明に移りましょう．完全性定理は，はじめゲーデルによって 1929 年に証明されましたが，それと独立に同じ 1929 年にエルブランが語彙 $\mathcal{L}$ からモデルを構築する技法について書いています．1949 年になるとヘンキン [32] が完全性定理の証明を述べるさいエルブランのアイデアが基盤になりうることに気づきました．文献 [32] に従っておおまかに言うと，証明は次のような 3 段構えになっています．

ステップ 1： 証人定数記号の添加，

ステップ 2： 極大無矛盾集合への拡大，

ステップ 3： エルブランのモデルの記述と，それでうまくいくことの証明．

ですが，ステップ 1 とステップ 2 の言っていることが何か説明するよりも前にステップ 3 から始めてしまいましょう．エルブランのモデルがどんなものかわかってしまえば，そのモデルがうまく働くためにステップ 1 とステップ 2 はおのずと必要になってきます．

主補題の証明に向けて，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ を仮定していますが，これは Σ に関

するまったくシンタクス的な仮定です．いっぽう示すべきことは $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ で，つまり Σ のモデルを作ってみせなければならないのですが，さてこのモデルは一体どこからやって来るのでしょうか．わたくしたちに与えられているものといえばシンタクスだけなのですから，シンタクスに関するものからモデルを作りあげるほかありません．この意味で，わたくしたちのモデルの構成は代数学における自由群や多項式環の構成を一般化するものとなっています．というのも，そうした代数的な構成では記号から群や環や体を構成しているからです．

はじめにモデルの宇宙を指定しましょう．もしもモデルが先に与えられているとしたら，言語の項はそのモデルのある要素を表示することになるでしょう．しかしわたくしたちは今のところまだモデルを手にしていないのですから，項そのものをモデルにおける対象物ということにするのが妥当でありましょう．実際には変数を含まない項だけを用います．というのも，それらがモデルにおいて確定した要素を表示しているからです．

定義 II.12.4 語彙 $\mathcal{L}$ の項 τ が変数を含まないとき，τ を**閉項**という．$\mathcal{L}$ の閉項全体の集合を $\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ と書く．

閉項 τ の値 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$ は τ と $\mathfrak{A}$ で決まり，変数への値の割り当てには依存しません（定義 II.7.4 と演習問題 II.7.5）．わたくしたちは空な構造を認めていないので，モデルの宇宙として $\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ を用いるためには $\mathcal{L}$ になんらかの閉項があること，いいかえれば $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ であることが必要です．ここで $\mathcal{F}_0$ は定義 II.5.2 で述べたとおり $\mathcal{L}$ の定数記号全体の集合です．このとき定義 II.7.1 の意味での $\mathcal{L}$ に対する構造を次のように定めます．

定義 II.12.5 Σ は語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合であるとし，また $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ であると仮定する．$\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ を宇宙とする構造 $\mathfrak{A}_0$ を

- ☞ $f \in \mathcal{F}_n$ かつ $n > 0$，$\tau_1, \cdots, \tau_n \in \mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ のとき，$f_{\mathfrak{A}_0}(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ とは閉項 $f(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ のこと，
- ☞ $p \in \mathcal{P}_n$ かつ $n > 0$，$\tau_1, \cdots, \tau_n \in \mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ のとき，$(\tau_1, \cdots, \tau_n) \in p_{\mathfrak{A}_0}$ とは $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ となること，
- ☞ $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $c_{\mathfrak{A}_0} = c$,
- ☞ $p \in \mathcal{P}_0$ のとき $p_{\mathfrak{A}_0} = 1$（真）とは $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ となること

と定め，これを **閉項モデル** $\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)$ と呼ぶ．

各閉項の値（定義 II.7.4）がその閉項そのものであることが帰納法でたやすくわかります：

補題 II.12.6　$\tau\in\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)}(\tau)=\tau$.

構造 $\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)$ の定義はたとえ Σ が矛盾していても意味をなすので，一般には $\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)\vDash\Sigma$ となるとは主張できません．函数記号の解釈が Σ に依存していないことにも注意しましょう．たとえば $\mathcal{L}=\{+,0\}$ で，Σ が $\forall x[x+0=x]$ という公理を含んでいたとします．このとき，言及の範囲 $\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ は可算無限集合で，Σ によらず $\mathcal{L}$ だけから作られています．この言及の範囲には 0, $0+0$, $0+(0+0)$, $(0+0)+0$，等々の閉項が属しています．これらはすべて互いに異なる対象なので，$\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}0+0=0$ なのに $\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)\vDash 0+0\neq 0$ です．この例からわかるように，言及の範囲として閉項そのものを使うわけにはいきません．代わりに，等しさが Σ から証明できる閉項どうしを同値とみなし，同値類の全体を考えるべきなのです．

定義 II.12.7　$\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ 上の関係 $\sim$（正確には $\sim_{\mathcal{L},\Sigma}$）を

$$\tau\sim\sigma\iff\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\tau=\sigma$$

によって定める．

補題 II.12.8　この $\sim$ は $\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ 上の同値関係である．

【証明】　$\sim$ が反射的・対称・推移的であることを示さねばならない（定義 I.7.2）．対称性を示すためには，$\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\tau=\sigma$ を仮定して $\Sigma\vdash_{\mathcal{L}}\sigma=\tau$ を示すことになる．いま，$\forall x,y[x=y\leftrightarrow y=x]$ はタイプ 8 の論理の公理だから，規則 UI（補題 II.11.8 参照）により $\emptyset\vdash_{\mathcal{L}}\tau=\sigma\leftrightarrow\sigma=\tau$ となる．$\sigma=\tau$ は $\tau=\sigma$ と $\tau=\sigma\leftrightarrow\sigma=\tau$ からトートロジーで得られる（補題 II.11.6 参照）．反射的であることや推移的であることも同様で，タイプ 7 あるいはタイプ 9 の論理の公理から得られる．　□

これで商集合 $\mathsf{CT}_0(\mathcal{L})/{\sim}$（定義 I.7.5 参照）を作れることになりましたが，さらにその上に適切な $\mathcal{L}$-構造を定めてやる必要があります．

定義 II.12.9　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合だとし，また $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ と仮定する．$\mathsf{CT}(\mathcal{L}, \Sigma) = \mathsf{CT}_0(\mathcal{L}, \Sigma)/\sim$ と定める．**エルブランのモデル** $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ とはこの $\mathsf{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ を宇宙とし，記号の解釈を

✎ $f \in \mathcal{F}_n$，$n > 0$ で $[\tau_1], \cdots, [\tau_n] \in \mathsf{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ のとき $f_{\mathfrak{A}}([\tau_1], \cdots, [\tau_n])$ とは $[f(\tau_1, \cdots, \tau_n)]$ のこと，

✎ $p \in \mathcal{P}_n$，$n > 0$ で $[\tau_1], \cdots, [\tau_n] \in \mathsf{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ のとき $([\tau_1], \cdots, [\tau_n]) \in p_{\mathfrak{A}} \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1, \cdots, \tau_n)$，

✎ $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $c_{\mathfrak{A}} = [c]$，

✎ $p \in \mathcal{P}_0$ のとき $p_{\mathfrak{A}} = 1$（真）$\iff \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$

によって定めた $\mathcal{L}$-構造のことである．

【定義の正当性の検証】　$n > 0$ のときの $f_{\mathfrak{A}}$ や $p_{\mathfrak{A}}$ の定義が同値類の代表の選びかたによらないことを確認する．少し具体的にいって，$i = 1, \cdots, n$ について $\tau_i \sim \sigma_i$ であったとする．このとき $[\tau_i] = [\sigma_i]$ である．ここで $[f(\tau_1, \cdots, \tau_n)] = [f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)]$ すなわち $f(\tau_1, \cdots, \tau_n) \sim f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ であることを確かめられないうちは，定義が多義的であいまいだということになる．

さて，$\forall x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n[\, x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \cdots, x_n) = f(y_1, \cdots, y_n)\,]$ はタイプ 10 の論理の公理であるから，規則 UI（補題 II.11.8）によって $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} [\,\tau_1 = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n = \sigma_n \to f(\tau_1, \cdots, \tau_n) = f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)\,]$ である．また，$\sim$ の定義により各 i で $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tau_i = \sigma_i$ であり，これらのことからトートロジーによって（補題 II.11.6 参照）$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} f(\tau_1, \cdots, \tau_n) = f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ が従う．ゆえに $f(\tau_1, \cdots, \tau_n) \sim f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ である．

これと同様に，$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ とが同値であることを確かめるまでは，わたくしたちの $p_{\mathfrak{A}}$ の定義は多義的であいまいである．とはいえこれも先ほどと似たような議論ですむ．というのも，$\forall x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n\big[\, x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to \big(p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow p(y_1, \cdots, y_n)\big)\,\big]$ がタイプ 11 の論理の公理だからである．　□

この証明でも補題 II.12.8 の証明でも，必要となる命題が「ちょうどいい具合に」論理の公理のリストに含まれていました．このことは魔法でもなん

でもありません．セクション II.10 で指摘したとおり，論理の公理のリストの選び方にはかなりの任意性がありますが，わたくしたちのリストは完全性定理の証明がうまく運ぶように選んであるのです．

商構造 $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ においては互いに「等しくてしかるべき」項が等しくなります．先ほどの例でいえば，$\mathcal{L} \supseteq \{+,0\}$ であって Σ に $\forall x[x+0=x]$ という公理が含まれているとき，$\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma) \vDash 0+0 \neq 0$ でありながら $[0+0]=[0]$ なので $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma) \vDash 0+0=0$ となるのです．次の補題では，文の集合 Σ に特に制限を設けない場合に，一般に $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ がどの程度「うまくやってくれる」かを述べています．

補題 II.12.10　語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ を考える．ただし $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ と仮定する．$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ としよう．このとき，

（1）$\mathcal{L}$ の閉項 τ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) = [\tau]$.

（2）$\mathcal{L}$ の文 φ が $\forall x_1,\cdots,x_n\psi(x_1,\cdots,x_n)$ の形だとすると，$\mathfrak{A} \vDash \varphi$ と $\mathcal{L}$ のすべての閉項 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ について $\mathfrak{A} \vDash \psi(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ であることが同値.

（3）φ が原子論理式である文のときは，$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ が同値.

（4）φ が原子論理式の全称閉包で $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ のときは $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ である.

【証明】　(1) は τ に関する帰納法によってたやすく示せる．(2) のためには (1) と補題 II.8.13 に加えて，構造の宇宙 A の要素がすべてなんらかの閉項 τ についての同値類 $[\tau]$ であるという事実を用いる．

(3) には二つの場合がある．φ が $p(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ で $\tau_1,\cdots,\tau_n$ が閉項であるときは，$\vDash$ の定義と $p_{\mathfrak{A}}$ の定義，それと (1) により $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i) = [\tau_i]$ であることから

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff ([\tau_1],\cdots,[\tau_n]) \in p_{\mathfrak{A}} \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1,\cdots,\tau_n)$$

である．いっぽう φ が $\tau_1 = \tau_2$ のときは $\mathfrak{A} \vDash \varphi \iff [\tau_1] = [\tau_2] \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tau_1 = \tau_2$ である．

(4) について．ψ が原子論理式で φ が $\forall x_1,\cdots,x_n\psi(x_1,\cdots,x_n)$ だったとする．(2) によれば示すべきことはすべての閉項 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ について $\mathfrak{A} \vDash \psi(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ となることだ．いま $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ なので規則 UI（補題 II.11.8）により $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ であり，$\psi(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ は原子論理式なので (3) に

より求める結果が得られる. □

ですからとくに Σ に属する文がすべて原子論理式の全称閉包であったとすれば $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma) \models \Sigma$ となります. そうした状況は実際に起こりえます. たとえば, a と b を定数記号とし $\mathcal{L} = \{\cdot, i, 1, a, b\}$ として, Σ を 139 ページに示した群論の公理系 $\{\gamma_1, \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}\}$ としましょう. このとき Σ は a にも b にも言及こそしませんが, a と b から構成されるいろいろの閉項のうちどれとどれが「等しくてしかるべき」ものかを教えてくれます. たとえば結合法則 γ_1 と量化の規則 UI から $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} a \cdot (b \cdot a) = (a \cdot b) \cdot a$ となる, というように. また Σ の三つの公理はいずれも等式を全称量化して文にしたものですから, 補題 II.12.10 によれば $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ は群となります. この群 $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ は二つの生成元から作られる自由群にほかなりません. こうした代数的な例についてはセクション II.14 で詳しく扱っています.

多くの場合に $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ は Σ のモデルになりません. つまらない話ですが Σ は矛盾しているかもしれず, そうすれば Σ から何だって証明できてしまうため, Σ のモデルは存在しません. すべての閉項が同値になるため $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ はただ一つの要素からなるモデルとなり, この唯一の要素についてのすべての述語は真となります. それは補題 II.12.10 の (3) によってすべての原子論理式がこのモデルにおいて真になることからも予期されるところです.

次にもう少しマシな例を挙げますが, この例を見ると Σ が無矛盾の場合に $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ が Σ のモデルになり損なう二つの主な理由がわかります. a と b を定数記号とし $\mathcal{L} = \{<, a, b\}$ とします. Σ は $<$ が最大要素のない ($\forall y \exists x (y < x)$) 狭義の全順序づけ (定義 I.7.2) であると主張する公理系としましょう. このとき Σ は a にも b にも言及していません. 閉項は a と b だけで, $\Sigma \nvdash_{\mathcal{L}} a = b$ なので $a \not\sim b$ です. そこで $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ は二つの要素 $[a] = \{a\}$ と $[b] = \{b\}$ からなるモデルで, $<_{\mathfrak{A}}$ は空な関係です. τ と σ を a と b のどちらとしても $\Sigma \nvdash_{\mathcal{L}} \tau < \sigma$ だからです.

- 難点その 1: $\Sigma \vdash \exists x (b < x)$ なのに $\mathfrak{A} \not\models \exists x (b < x)$.
- 難点その 2: Σ は全順序の三分律の公理 (定義 I.7.2 参照) を含んでいるから $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (a < b \vee b < a \vee a = b)$ となるが, この式は $<_{\mathfrak{A}}$ が空な関係であるため $\mathfrak{A}$ で成立していない.

188 ページで述べたステップ 1 とステップ 2 がこの難点を解決してくれます．ステップ 1 において，存在してしかるべきすべてのものにそれぞれその名前を与える「証人定数記号」をあらたに追加します．この例の場合，新しい定数記号 c と公理 $b < c$ が追加されることになります．最大要素のない全順序集合は必ず無限集合になるので，このプロセスも無限に繰り返さなくてはなりません．ステップ 2 では無矛盾な Σ を無矛盾な集合のうち極大なものにまで拡大します．この例であれば，$a < b$ と $b < a$ と $a = b$ という三つの選択肢のうちどれか一つを選んでそれを Σ に追加することで決着をつけます．どちらのステップを先にしてもよいのですが，説明が比較的用意なステップ 2 から始めます．

定義 II.12.11　語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ は次の条件をみたすとき**極大** $(\vdash, \mathcal{L})$ **無矛盾**であるといわれる：

（1）　$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ であって，

（2）　$\mathcal{L}$ の文のどんな集合 Π についても $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Pi)$ かつ $\Pi \supsetneq \Sigma$ とはならない．

前から言っているとおり，完全性定理が証明されればそれ以後は単に $\mathrm{Con}(\Sigma)$ と書くことになります．ですから，ここで言っていることも通常は「極大無矛盾」と呼んでいるのですが，語彙 $\mathcal{L}$ の拡大を認めればどんな無矛盾な Σ も無矛盾な真の拡大をもつのですから，どの $\mathcal{L}$ について議論しているのかを心にとめておくのはどのみち大切なことです．

補題 II.12.12　Δ が $\mathcal{L}$ の文の集合で $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Delta)$ であるものとすると，$\mathcal{L}$ の文の集合 Σ で，Δ を含んで極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾であるようなものが存在する．

【証明】　$\mathcal{L}$ のすべての文のなす集合を S とすると，$\Delta \in \mathcal{P}(S)$ である．$\mathcal{F} = \{\Pi \in \mathcal{P}(S) : \mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Pi)\}$ としよう．すると，$\mathcal{F}$ は有限特性の集合族（定義 I.12.5）である．なぜなら $\mathcal{P}(S)$ の要素 Π からのフォーマルな証明はすべて Π に属する有限個の文だけしか用いないから．ある極大な $\Sigma \in \mathcal{F}$ が $\Sigma \supseteq \Delta$ となるようにとれることは，タッキーの補題（定義 I.12.7）から従う．　□

このような Σ の存在はツォルンの補題を用いても，また超限再帰によっても示すことができます．完全性定理の証明ではまず $\Sigma \supseteq \Delta$ となる極大無矛盾な Σ をみつけ，それから $\mathfrak{A} \models \Sigma$ となる $\mathfrak{A}$ を得ます．そうすれば当然 $\mathfrak{A} \models \Delta$ となります．閉項モデル $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ は $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Delta)$ よりも扱いやすいものになりますが，その理由は極大性から従う次の性質によるのです．

補題 II.12.13　$\mathcal{L}$ の文の極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾な集合 Σ を考える．このとき $\mathcal{L}$ の任意の文 φ と ψ について，

（1）$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \varphi \in \Sigma$;

（2）$(\neg\varphi) \in \Sigma \iff \varphi \notin \Sigma$;

（3）$(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \iff \varphi \in \Sigma$ または $\psi \in \Sigma$.

【証明】　(1) について，$\Leftarrow$ は明らか．$\Rightarrow$ については $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ のとき $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ から $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$ であり，極大性から $\varphi \in \Sigma$ を得る．

(2) について，$\Rightarrow$ は $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ から明らか．$\Leftarrow$ については，$\varphi \notin \Sigma$ とすると極大性から $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$ であり，背理法（補題 II.11.4）によって $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$，したがって (1) より $\neg\varphi \in \Sigma$ である．

(3) の $\Leftarrow$ について，Σ が φ と ψ の少なくとも一方を含むとすれば，それからトートロジーで得られる $\varphi \vee \psi$ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi$ であり（補題 II.11.6 参照），(1) により $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ である．

(3) の $\Rightarrow$ について，$\varphi \vee \psi \in \Sigma$ かつ $\varphi \notin \Sigma$ かつ $\psi \notin \Sigma$ だったとしよう．すると (2) により $\neg\varphi$ と $\neg\psi$ が Σ に属することになり，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ に反する．□

先ほどの例をもう一度とりあげましょう．語彙 $\mathcal{L} = \{<, a, b\}$ の文の集合 Σ が，$<$ が最大要素をもたない狭義の全順序づけだと主張する公理系で，Σ' は Σ を含む極大無矛盾な集合とします．この Σ' を用いれば，難点その 2 は補題 II.12.13 によって解消されます．すなわち，$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma')$ とするとき，$\Sigma' \vdash_{\mathcal{L}} (a < b \vee b < a \vee a = b)$ であることから $(a < b \vee b < a \vee a = b) \in \Sigma'$ となり，Σ' には $a < b$ と $b < a$ と $a = b$ のうちどれかが属することになります．Σ の極大無矛盾な拡大は一意には定まらないので，どれになるかは Σ' 次第ですが，Σ' が 3 つの選択肢を 2 つ以上含むことはありません．どの 2 つを加えても，狭義全順序づけの公理系と矛盾することにな

るからです．Σ' に $a = b$ が属しているなら $[a] = [b] = \{a, b\}$ で，$\mathfrak{A}$ は単一の要素だけの順序集合となって，$<_{\mathfrak{A}}$ は必然的に空な関係となります．また Σ' に $a < b$ が属しているなら，$\mathfrak{A}$ は 2 つの要素のみからなり a が b の下に位置するような全順序集合になります．

この例は次のように一般化されます： 極大無矛盾集合は量化記号を用いない文をすべて扱うことができます．

補題 II.12.14　語彙 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ であるものとし，文の集合 Σ は極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾であるとする．$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ とする．$\mathcal{L}$ の文 φ が量化記号を用いないものであれば，$\varphi \in \Sigma$ と $\mathfrak{A} \models \varphi$ とは同値である．

【証明】　定義 II.7.8 を思い出そう．$\mathfrak{A}$ における φ の真理値（T または F）を $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ と書くのだった．ここではさらに，$\varphi \in \Sigma$ のとき $\mathrm{val}_{\Sigma}(\varphi)$ が T で，$\varphi \notin \Sigma$（補題 II.12.13 によりこれは $(\neg\varphi) \in \Sigma$) と同値）のとき $\mathrm{val}_{\Sigma}(\varphi)$ が F として val_{Σ} を定義する．すると証明すべき補題は，量化記号を用いない文 φ についてつねに $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = \mathrm{val}_{\Sigma}(\varphi)$ となる，と言い直すことができる．

この等式を φ に関する帰納法で示そう．量化が用いられていないので，φ は原子論理式である文から命題演算を用いて得られるはずだ．

帰納法の出発点としてまず φ が原子論理式である文としよう．このとき補題 II.12.13 により $\varphi \in \Sigma \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であり，補題 II.12.10 により $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \mathfrak{A} \models \varphi$ である．

帰納法の仮定として φ より短い文について補題が成立するものとする．そのうえで φ について補題を示す．φ がより短い文からどのようにして構成されるかに応じて話は 5 つの場合に分かれる．

まず φ が $\neg\psi$ である場合，$\neg\psi \in \Sigma \iff \psi \notin \Sigma \iff \mathfrak{A} \not\models \psi \iff \mathfrak{A} \models \neg\psi$ となる．ここで $\iff$ と 3 回書いたけれども，それらはそれぞれ補題 II.12.13，帰納法の仮定，$\models$ の定義にもとづくものである．

これ以外の 4 つの場合，$\odot$ が $\vee$ と $\wedge$ と $\to$ と $\leftrightarrow$ のうちいずれかとして，φ は $\psi \odot \chi$ である．定義 II.7.8 によれば，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\chi)$ から $\odot$ の真理値表（3 ページの表 1）にもとづいて $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ が求められる．だから，それと同じ真理値表を用いて $\mathrm{val}_{\Sigma}(\varphi)$ が $\mathrm{val}_{\Sigma}(\psi)$ と $\mathrm{val}_{\Sigma}(\chi)$ から求められることを示せば，帰納法のステップが完了する．そして，このことは正しい．な

ぜなら，トートロジーの概念も同じ真理値表を用いて定められたのであり，わたくしたちはこのトートロジーをタイプ 1 の論理の公理とし，またそれらを補題 II.11.6 のトートロジー推論にも用いたのだから．より正確に言うなら，$\odot$ の 4 つの可能性のそれぞれについて考える必要がある．わたくしたちはここで $\vee$ の場合と $\leftrightarrow$ の場合をやり，$\wedge$ の場合と $\rightarrow$ の場合は演習問題とする．

さて，$\odot$ が $\vee$ のときは補題 II.12.13 からただちに従う．

次に $\odot$ が $\leftrightarrow$ のときを考える．もしも $\mathrm{val}_\Sigma(\psi) = \mathrm{val}_\Sigma(\chi)$ であれば，$\{\psi, \chi\} \subseteq \Sigma$ であるか $\{\neg\psi, \neg\chi\} \subseteq \Sigma$ であるかどちらかであり（どちらからでも補題 II.11.6 の意味で φ がトートロジーで得られるから）補題 II.12.13 により $\varphi \in \Sigma$ であり，$\mathrm{val}_\Sigma(\varphi) = T$ である．他方もしも $\mathrm{val}_\Sigma(\psi) \neq \mathrm{val}_\Sigma(\chi)$ であれば，$\{\psi, \neg\chi\} \subseteq \Sigma$ であるか $\{\neg\psi, \chi\} \subseteq \Sigma$ であるかどちらかであり，どちらの場合も $\neg\varphi$ がトートロジーで得られるから $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ であって $\neg\varphi \in \Sigma$ すなわち $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi) = F$ である．$\mathrm{val}_\Sigma(\psi)$ と $\mathrm{val}_\Sigma(\chi)$ のとりうる値の 4 つの場合のどれについても $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi)$ は $\leftrightarrow$ の真理値表で $\mathrm{val}_\Sigma(\psi)$ と $\mathrm{val}_\Sigma(\chi)$ から定められる値になる．　□

これで「難点その 2」は片付いたので，次は量化記号を含む文に関連して現われた「難点その 1」に対処しましょう．先ほどの例で触れたとおり，何物かが存在することが公理から導かれるときに，その何物かに名前をつける閉項をもっているようにしなければなりません．このことをフォーマルに述べたのがこの後の定義 II.12.16 です．

定義 II.12.15　$\exists x\varphi(x)$ の形の文を**存在文**という．

このとき φ には x の他には自由変数がないので，任意の閉項 τ について $\varphi(\tau)$ は文となります．

定義 II.12.16　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\exists x\varphi(x)$ を存在文とするとき，閉項 τ が（$\Sigma, \mathcal{L}$ に関して）$\exists x\varphi(x)$ の**証人**であるとは $\tau \in \mathsf{CT}_0(\mathcal{L})$ かつ $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists\varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau))$ であるときにいう．すべての存在文に対し少なくとも一つの証人が存在するなら，Σ は $\mathcal{L}$ に**すべての証人をもつ**という．

公理の集合は，ある存在文については証人をもち他の存在文についてはも

たないかもしれません．たとえば Σ を語彙 $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, -, i\}$ で書かれた体の公理系としましょう．ここで $-$ は加法の逆元をあらわす単項函数記号，i は逆数すなわち乗法の逆元をあらわす単項函数記号です．これらについては例 II.8.23 を見てください．ここで論理式 $x + 1 = 0$ を $\varphi(x)$ とし，論理式 $(1+1) \cdot x = 1$ を $\psi(x)$ としましょう．このとき項 -1 は $\exists x \varphi(x)$ の証人であり，項 $i(1+1)$ は $\exists x \psi(x)$ の証人になっています．φ の場合は $\exists x \varphi(x)$ と $\varphi(-1)$ がいずれも Σ から証明されます．いっぽう ψ の場合，$\exists x \psi(x)$ も $\psi(i(1+1))$ も Σ からは証明されません．体は標数 2 のこともあるからです．それでも，$\exists x \psi(x) \to \psi(i(1+1))$ という含意は，例 II.8.23 の公理(5)を用いて証明できます．ところが，この言語には $\sqrt{2}$ に相当する記号がありませんから，論理式 $1 + 1 = x \cdot x$ を $\chi(x)$ としたとき，存在文 $\exists x \chi(x)$ には証人がいません．このことは次のようにしてわかります．実数の体では $\exists x \chi(x)$ が真となる一方，言語の閉項 τ の値はどれも有理数になるので $\chi(\tau)$ は偽となり，含意文 $\exists x \chi(x) \to \chi(\tau)$ も偽となるのです．インフォーマルな話として，定数記号 c と公理 $\exists x \chi(x) \to \chi(c)$ とを追加しても無矛盾性が保たれます．この公理は，2 が平方根をもつはずだ，ということを主張するものではなく，もしも 2 の平方根があるとすればその一つは c だ，と言っているにすぎません．ですから，インフォーマルに言って，この公理は矛盾をもたらさないばかりか，新しいことは何ひとつ言っておらず，せいぜい一つの**保守的拡大**を生みだすにすぎません．すなわち，記号 c にまったく言及しない文がこの新しい公理を使って証明できるなら，使わなくても証明できるのです．ここで言ったことは，あとの補題 II.12.18 と II.12.20，それから演習問題 II.12.23 において，どんな無矛盾な Σ もしかるべき個数の定数記号を追加すればすべての存在文の証人をもつように拡大することが可能，というフォーマルな形で述べられます．ひとまず，このようにすれば難点その 1 が実際に解決することを証明します．

補題 II.12.17　Σ は語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合だとする．Σ が極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾で $\mathcal{L}$ にすべての証人をもつと仮定し，$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ とする．このとき，$\mathfrak{A} \models \Sigma$ である．

【証明】　語彙 $\mathcal{L}$ のすべての文 φ について

$$\varphi \in \Sigma \iff \mathfrak{A} \models \varphi \tag{$*$}$$

となることを証明しよう．φ における論理記号 $\land, \lor, \neg, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists$ の出現回数の合計を $S(\varphi)$ とし，この数に関する帰納法で証明する．

まず $S(\varphi)=0$ のとき，すなわち φ が原子論理式であるときには，補題 II.12.14 により $(*)$ が成立する．

次に $S(\varphi)>0$ として，これより S の値が小さいすべての文について $(*)$ が成立しているものと仮定しよう．考えるべきことは大きく二つに場合分けされる．

命題演算記号の場合，φ は $\neg\psi$ の形か，$\psi \odot \chi$ の形をしている．ここで $\odot$ は $\land, \lor, \to, \leftrightarrow$ のどれかである．この場合，φ についての $(*)$ は，補題 II.12.14 の証明とまったく同様にして ψ についての $(*)$ から，あるいは ψ と χ についての $(*)$ から，得られる．

量化記号の場合，φ は $\exists x\psi(x)$ か $\forall x\psi(x)$ である．

まず φ が $\exists x\psi(x)$ であれば，$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists x\psi(x) \to \psi(\tau))$ となる証人 τ がある．このとき $S(\psi(\tau)) = S(\varphi)-1$ だから $\psi(\tau)$ については $(*)$ が成立する．$\varphi \in \Sigma$ ならば $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi(\tau)$ であるから極大性（補題 II.12.13）により $\psi(\tau) \in \Sigma$，したがって $\mathfrak{A} \models \psi(\tau)$ であり $\mathfrak{A} \models \varphi$ である．逆に $\mathfrak{A} \models \varphi$ のときは，$\models$ の定義により $\mathfrak{A}$ の宇宙 A のある要素 a について $\mathfrak{A} \models \psi(a)$ となっている．$\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ の定義によりこの a はある閉項 π についての $[\pi]$ であるから，補題 II.12.10 (1) と II.8.10 を用いて $\mathfrak{A} \models \psi(\pi)$ となる．$\psi(\pi)$ についての $(*)$ により $\psi(\pi) \in \Sigma$ となるので規則 EI（補題 II.11.8）により $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$，したがって極大性により $\varphi \in \Sigma$ である．

補題 II.12.14 の証明と違って，$\psi(\tau)$ や $\psi(\pi)$ が φ より長くなりうるため，この証明では φ の長さに関する帰納法が使えないことに注意．

残ったのは φ が $\forall x\psi(x)$ の場合．まず $\varphi \in \Sigma$ とすると，規則 UI と極大性により任意の閉項 π に対して $\psi(\pi) \in \Sigma$ となる．このとき，$\exists$ の場合にやったように，すべての閉項 π について $\mathfrak{A} \models \psi(\pi)$ となり，したがって $\mathfrak{A} \models \varphi$ となる．逆に $\varphi \notin \Sigma$ だったとすると極大性により $\neg\varphi \in \Sigma$ である．$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists x\neg\psi(x) \to \neg\psi(\tau))$ となるように証人 τ をとろう．例 II.11.9 にあるとおり $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \neg\forall x\psi(x) \to \exists x\neg\psi(x)$ であるから，トートロジー推論により $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi(\tau)$ であり，Σ の無矛盾性により $\psi(\tau) \notin \Sigma$ である．このとき $\psi(\tau)$ に

ついての $(*)$ から $\mathfrak{A} \nvDash \psi(\tau)$ であって，したがって $\mathfrak{A} \nvDash \varphi$ となる．□

すべての証人をもつ無矛盾な集合が作れることの証明がまだ済んでいません．次の補題から始めましょう．

補題 II.12.18　Σ が $\mathcal{L}$ の文からなる集合，$\exists x\varphi(x)$ が $\mathcal{L}$ のある存在文，c を $\mathcal{L}$ に属さない新しい定数記号とし $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ とする．$\Sigma' = \Sigma \cup \{\exists x\varphi(x) \to \varphi(c)\}$ と定め，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と仮定する．このとき $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$ である．

【証明】 セクション II.11 で確かめた証明論上の事実を用いる．$\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$ であったと仮定すると

(0)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \neg(\exists x\varphi(x) \to \varphi(c))$	背理法による
(1)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \exists x\varphi(x)$	(0) とトートロジー
(2)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \neg\varphi(c)$	(0) とトートロジー
(3)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\neg\varphi(x)$	(2) と規則 UG
(4)	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists x\varphi(x)$	タイプ 6 の公理
(5)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\exists x\varphi(x)$	(3) と (4) とトートロジー
(6)	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x\varphi(x)$	(1) と補題 II.11.12

となる．この (5) と (6) によって $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ となることがわかる．ステップ (1)(2)(5) は実は定理 II.11.6 の助けを借りており，ステップ (0) は補題 II.11.4 による．□

この補題を繰り返し用い，一つの文ごとに 1 個の定数記号を追加すれば，複数の文にそれぞれの証人が付け加えられます．

補題 II.12.19　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，δ を任意の順序数としよう．各 $\alpha < \delta$ に対する新しい定数記号 c_α を考えて，δ 以下の α について $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L} \cup \{c_\xi : \xi < \alpha\}$ とおく．各 $\alpha < \delta$ に対して $\exists x\varphi_\alpha(x)$ を語彙 $\mathcal{L}_\alpha$ の存在文とし，$\Sigma_\delta = \Sigma \cup \{\exists x\varphi_\alpha(x) \to \varphi(c_\alpha) : \alpha < \delta\}$ とおく．$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と仮定するとき，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}_\delta}(\Sigma_\delta)$ である．

【証明】　δ に関する帰納法．$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ であり $\Sigma_0 = \Sigma$ であるから，$\delta = 0$ のときは何も言うことがない．後続順序数の場合は補題 II.12.18 で扱える．極

限順序数の場合は Σ_δ からのフォーマルな証明が有限個の文だけからなるという事実に訴える． □

この補題で $\exists x \varphi_\alpha(x)$ として語彙 $\mathcal{L}$ のすべての存在文を並べることもできますが，そうしたからとて Σ_δ が $\mathcal{L}_\delta$ にすべての証人をもつという主張はできません．証人をもたない $\mathcal{L}_\delta$ の存在文があるかもしれないからです．それでも，この手順を ω 回反復すれば，すべての証人をもつ文の集合を構成できます．この構成では，すべての証人は定数記号です．

補題 II.12.20 Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と仮定する．$\kappa = \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$ としよう．このとき次のような Σ' と $\mathcal{L}'$ が存在する：

（1） $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$，ただし $\mathcal{C}$ はなんらかの定数記号の集合．

（2） $|\mathcal{L}'| = |\Sigma'| = \kappa$.

（3） $\Sigma \subseteq \Sigma'$ であり，Σ' は $\mathcal{L}'$ の文からなる集合．

（4） $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$.

（5） Σ' は $\mathcal{L}'$ にすべての証人をもつ．

【証明】 $\mathcal{C} = \{ c_\alpha : \alpha < \kappa \cdot \omega \}$ とする．これで(1)と(2)は明らかである．補題 II.12.19 の言葉を使い，$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\kappa \cdot \omega}$ とする．$\mathcal{L}_{\kappa \cdot n}$ にはちょうど κ 個の存在文があるので，それを $\{\exists x \varphi_\alpha(x) : \kappa \cdot n \leq \alpha < \kappa \cdot (n+1)\}$ とリストアップする．$\delta = \kappa \cdot \omega$ として補題 II.12.19 を適用しよう．$\Sigma' = \Sigma_\delta$ とおけば(4)が従い，(3)は明らかである．さらに $\{\exists x \varphi_\alpha(x) : \alpha < \kappa \cdot \omega\}$ に $\mathcal{L}'$ のすべての存在文がリストアップされることになるので(5)が導かれる． □

補題 II.12.3 において示したとおり，完全性定理 II.12.1 を証明するには，主補題 II.12.2 を証明すれば十分です．これからそれにとりかかります．

【補題 II.12.2 と完全性定理の証明】 Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ を仮定する．示すべきことは Σ のモデルの存在である．これを示すために 188 ページで述べた 3 ステップを踏んでいこう．

ステップ 1 補題 II.12.20 により，次のような集合 Σ' と $\mathcal{L}'$ が存在する：Σ' は $\mathcal{L}'$ の文からなる集合であって，$\Sigma \subseteq \Sigma'$，$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ であり，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$ であり，かつ，Σ' は $\mathcal{L}'$ にすべての証人をもつ．

ステップ 2　補題 II.12.12 により，$\mathcal{L}'$ の文からなる集合 Σ^* で，$\Sigma' \subseteq \Sigma^*$ であり，極大 $(\vdash, \mathcal{L}')$ 無矛盾であるようなものがとれる．すべての証人をもつことの定義（II.12.16）は単に Σ' に特定の形の文が属していることだけを求めているので，Σ^* もまた $\mathcal{L}'$ にすべての証人をもつ．

ステップ 3　すると，補題 II.12.17 により，エルブランのモデル $\mathfrak{A}' := \mathfrak{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)$ は Σ^* のモデルである．ここでもちろん $\mathfrak{A}'$ は $\mathcal{L}'$-構造であって $\mathcal{L}$-構造ではないが，$\mathfrak{A}'$ の $\mathcal{L}$ への縮少 $\mathfrak{A}' \restriction \mathcal{L}$ を $\mathfrak{A}$ とすれば，$\mathfrak{A}$ は $\mathcal{L}$-構造で $\mathfrak{A} \models \Sigma$ となる．□

これで完全性定理は証明できたので，これからは Con の添字を省略して単に $\mathrm{Con}(\Sigma)$ と書くことにします．論理的帰結についても $\Sigma \models \varphi$ と $\Sigma \vdash \varphi$ とを同じ意味で用います．また 174 ページでの予告どおり，$\vdash$ の不恰好な添字は省くことにします．

補題 II.12.21　Σ は語彙 $\mathcal{L}_0$ の文からなる集合，φ は $\mathcal{L}_0$ の文であり，$\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$ であるとする．このとき $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_0} \varphi$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ は同値である．

【証明】　どちらも $\Sigma \models \varphi$ と同値だが，こちらは（補題 II.8.15 により）語彙 $\mathcal{L}$ には依存しない．□

コンパクト性定理（154 ページ）も簡単に導かれます：

【定理 II.7.15 の証明】　セクション II.7 で指摘されたとおりこの定理の二つの部分は互いに同値なので，後半だけを証明する．示すべきことは，$\Sigma \models \varphi$ のとき，ある有限な $\Delta \subseteq \Sigma$ について $\Delta \models \varphi$ となることだ．ところが，$\models$ を $\vdash$ に置きかえてしまえば，このことはフォーマルな証明が有限であることから明らかである．□

作られるモデルのサイズを確認しながらここまで進んできたので，レーヴェンハイム-スコーレムの定理 II.7.17 の証明の準備もできました．補題 II.12.2 の証明を見ると，Σ がモデルを一つでももつとき，Σ は小さなモデルをもつ，というレーヴェンハイム-スコーレム定理の「下向き」の部分の証明になっていることがわかります．

補題 II.12.22　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\mathrm{Con}(\Sigma)$ と仮定する．

$\kappa = \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$ とする．このとき Σ は $|\mathfrak{A}| \le \kappa$ をみたすモデル $\mathfrak{A}$ をもつ．

【証明】 補題 II.12.2 の証明でやったとおりにモデルを構成したとしよう．語彙を拡張してすべての証人をもつ $\mathcal{L}'$ を作ったが，それに用いた補題 II.12.20 によれば $|\mathcal{L}'| = \kappa$ である．それから Σ' を極大な Σ^* に拡大した．後者も同じ語彙 $\mathcal{L}'$ で書かれている．それからエルブランのモデル $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)$ を作った．このモデルの宇宙は $\mathsf{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*) = \mathsf{CT}_0(\mathcal{L}')/{\sim}$ であった．ここで $\mathsf{CT}_0(\mathcal{L}')$ は $\mathcal{L}'$ の閉項全体の集合で，そのサイズはちょうど $|\mathcal{L}'| = \kappa$ に等しく，したがって $|\mathsf{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)| \le |\mathsf{CT}_0(\mathcal{L}')| = \kappa$ となる．□

この証明についてですが，$|\mathsf{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)| < \kappa$ となることはありえます．Σ が有限なモデルしかもたないこともあるので，このことは避けられません．しかしながら，Σ が無限モデルをもつなら，$|\mathcal{L}|$ 以上の任意のサイズの無限モデルをもちます．これが 155 ページで述べたレーヴェンハイム-スコーレム定理であり，その証明は次のとおりです：

【定理 II.7.17 の証明】 $\max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$ 以上の基数 κ を考える．ここでは Σ の，サイズがちょうど κ のモデルを作らねばならない．$\mathcal{C} = \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$ を κ 個の新しい定数記号の集合として $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ としよう．すると $|\mathcal{L}^*| = \kappa$ である．$\Sigma^* = \Sigma \cup \{c_\alpha \ne c_\beta : \alpha < \beta < \kappa\}$ とする．このとき Σ^* のどんなモデルもサイズが κ 以上であることは明らかであり，補題 II.12.22 によると，<u>もし $\mathrm{Con}(\Sigma^*)$ なら</u> Σ^* はサイズ κ 以下のモデル $\mathfrak{A}$ をもつが，このとき $|\mathfrak{A}| = \kappa$ である．

そこで，残るのは $\mathrm{Con}(\Sigma^*)$ を示すところだ．コンパクト性定理によれば，Σ^* の任意の有限部分集合 Δ について $\mathrm{Con}(\Delta)$ を示せば $\mathrm{Con}(\Sigma^*)$ が得られる．このような Δ は Σ^* に属する文のいくつかと，κ のある有限部分集合 F に属する α と β についての $c_\alpha \ne c_\beta$ という文とからなる．$\mathfrak{B}$ を $|\mathfrak{B}| \ge |F|$ をみたす Σ の任意のモデルとしよう．$\mathfrak{B}$ は $\mathcal{L}$-構造である．この $\alpha \in F$ である α に対する c_α を $\mathfrak{B}$ の宇宙 B の互いに異なる要素と解釈し，$\alpha \notin F$ であるときの c_α に対する c_α の解釈を任意に定めて $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{B}^*$ なる $\mathcal{L}^*$-構造に拡張したとしよう．すると $\mathfrak{B}^* \vDash \Delta$ であるから，$\mathrm{Con}(\Delta)$ である．
□

補題 II.12.12 で存在が保証された極大無矛盾集合という概念が完全性定理の証明の鍵になっています．そうした集合は，一般には選択公理の助けを借りて非構成的に得られるものですが，それでも，極大無矛盾集合の自然な実例もいくつか存在します．第一に，$\mathfrak{A}$ を任意の $\mathcal{L}$-構造とするとき，$\mathfrak{A}$ の理論 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$（定義 II.8.21）は極大無矛盾集合です．第二に，Σ が完全な（定義 II.8.19）文の集合であるとき，$\Sigma \models \varphi$ となる $\mathcal{L}$ の文 φ 全体の集合は極大無矛盾です．次のセクションでお話しするとおり，代数学においては完全な理論の例がいくつも知られています．

演習問題 II.12.23　補題 II.12.20 で得られた Σ' が本当に Σ の**保守的拡大**であることを証明しなさい．すなわち，$\mathcal{L}$ の任意の文 θ について，$\Sigma \vdash \theta$ と $\Sigma' \vdash \theta$ とが同値であることを証明しなさい．
[ヒント]　$\Sigma' \vdash \theta$ なのに $\Sigma \nvdash \theta$ であるとすれば，$\Sigma \cup \{\neg\theta\}$ から出発して補題 II.12.20 の証明の方法で矛盾に至る．　□

II.13　完全な理論

公理の**完全**な集合という概念（定義 II.8.19）は，「完全性定理」の「完全」とは完全に無関係です．それより**初等的同値**の概念との関連が密接です．

定義 II.13.1　$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}$-構造とするとき，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$（$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が**初等的同値**）であるとは，$\mathcal{L}$ のすべての文 φ について $\mathfrak{A} \models \varphi$ と $\mathfrak{B} \models \varphi$ が同値になることをいう．

これは $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ というのと同じことです．定義 II.8.21 参照．

補題 II.13.2　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とするとき，Σ が完全であるためには，まず Σ が無矛盾であり，かつ，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が Σ のモデルであるときにはいつでも $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ となることが，必要十分である．

もしも $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が同型（$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$，定義 II.8.18 参照）であれば，両者は「実質的に同じもの」なので，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ です．これは驚くにはあたりません．フォーマルには次のようにして証明できます．

補題 II.13.3　$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ のとき $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ である．

【証明】　$\Phi\colon \mathfrak{A} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathfrak{B}$ を同型写像としよう．すべての**論理式** ψ に関する帰納法によって，すべての $a_1, \cdots, a_n \in A$ について $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \cdots, a_n] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\Phi(a_1), \cdots, \Phi(a_n)]$ となることを確認しなさい．このことを ψ が文である場合，すなわち $n = 0$ である場合に適用すれば，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ を得る．□

互いに初等的同値でない二つの構造の例を挙げるのはたやすいことです．たとえば，群 $(\mathbb{Z}; +)$ は群 $(\mathbb{Q}; +)$ と初等的同値ではありません．このことは文 $\forall x \exists y (y + y = x)$ が $\mathbb{Q}$ においては真なのに $\mathbb{Z}$ においては偽となることからわかります．$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ となる二つの構造の自明でない**具体例**を挙げるのは，これほど簡単ではありません．次の補題では，一つの**抽象的な例**を与えています．

補題 II.13.4　構造 $\mathfrak{B}$ が無限で，語彙 $\mathcal{L}$ が可算で，$\kappa \geq \aleph_0$ であるとする．このとき構造 $\mathfrak{A}$ が存在して $|\mathfrak{A}| = \kappa$ かつ $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ をみたす．

【証明】　$\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ に対してレーヴェンハイム-スコーレム定理（II.7.17）を適用してみなさい．□

ところが，$(\mathbb{Q}; +)$ や $(\mathbb{R}; +)$ というように**具体的**に構造が与えられた場合に，それらが初等的同値であるかないかは，いつでも簡単にわかるというものではないのです．実は $(\mathbb{Q}; +) \equiv (\mathbb{R}; +)$ であることを後ほど（補題 II.13.7 で）証明します．そのためには公理の「自然な」集合 Σ を $(\mathbb{Q}; +)$ と $(\mathbb{R}; +)$ がいずれもそのモデルになるように選び，それからこの Σ が完全であることを証明します．そうすれば，$(\mathbb{Q}; +) \equiv (\mathbb{R}; +)$ であることは補題 II.13.2 から従います．

この話題にはあとで立ち返ることにして，次に与えられた Σ が完全であることを証明するための一つの方法を述べましょう．多くの方法が知られています（[13] や [46] を参照）が，ここでは**ウォシュ-ヴォート条件**だけを紹介します．この方法は**範疇性**という概念に関連していて，レーヴェンハイム-スコーレム定理の素直な応用例になっています．

定義 II.13.5　Σ が語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合で，κ が任意の基数であるとしよう．Σ が **κ-範疇的**であるとは，Σ のモデルのうちサイズが κ であるものがすべて互いに同型であることをいう．

定理 II.13.6（ウォシュ-ヴォート条件）　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，条件

（1）　Σ は無矛盾である，

（2）　Σ のモデルはすべて無限モデルである，

（3）　$\mathcal{L}$ は可算である，

（4）　なんらかの無限基数 κ について Σ は κ-範疇的である，

が成立していると仮定する．このとき，Σ は完全である．

【証明】　仮に Σ が完全でないとしよう．すると，$\mathcal{L}$ の文 φ を $\Sigma \nvDash \varphi$ かつ $\Sigma \nvDash \neg\varphi$ となるようにとれる．構造 $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ を，$\mathfrak{A} \vDash \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, $\mathfrak{B} \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}$ となるようにとる．条件(2)により $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は無限モデルである．補題 II.13.4 を用いて，構造 $\mathfrak{A}'$ と $\mathfrak{B}'$ を $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{B}'| = \kappa$ となるようにとろう．すると条件(4)により $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}'$ であるから補題 II.13.3 により $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$ となるはずだが，φ は $\mathfrak{B}'$ において真，$\mathfrak{A}'$ において偽のはずだから矛盾である．　□

一つのつまらない例として，$\mathcal{L} = \emptyset$ とし $\Sigma = \{\psi_n : 1 \leq n < \omega\}$ を無限集合の理論としましょう．この ψ_n は n 個以上の要素が存在すると主張する文で，たとえば ψ_3 なら $\exists x, y, z[x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z]$ です．この理論に対応する構造はたんなる集合で，全単射はすべて同型写像になるので，Σ はあらゆる無限基数 κ について κ-範疇的です．したがって，Σ は完全な理論です．

ウォシュ-ヴォート条件のようなモデル理論上の手法をもっと意味のある代数学上の理論に適用するには，代数学の詳しい知識が必要です．一例として，予告どおり $(\mathbb{Q}; +) \equiv (\mathbb{R}; +)$ であることの証明をしましょう．この二つの群はいずれも，ねじれのない可除アーベル群の公理系のモデルとなっています．可除アーベル群の公理系を得るには，アーベル群の公理系に，まず $0 < n < \omega$ をみたすすべての n に対して公理 $\forall x \exists y[x = ny]$ を追加します．ここで，ny というのは変数 y のコピー n 個の和である項 $y + y + \cdots + y$ の単なる略記にすぎません．たとえば $4y$ であれば $y + y + y + y$ の略記です．さらに $0 < n < \omega$ をみたすすべての n について公理 $\forall y[y \neq 0 \to ny \neq 0]$ を追加すれば，ねじれのない可除アーベル群の公理系 Σ が

得られます．もしも語彙 $\mathcal{L}$ が $\{+,-,0\}$ ではなくて単なる $\{+\}$ だったなら，式 $x=0$ のことを $x+x=x$ の略記とみなせばよろしい．このとき $(\mathbb{Q};+)\equiv(\mathbb{R};+)$ であることは次の結果からわかるのです．

補題 II.13.7　ねじれのない可除アーベル群の理論はあらゆる不可算基数 κ について κ-範疇的であり，したがって完全である．

【証明】　完全性はウォシュ-ヴォート条件により範疇性から従う．範疇性の証明のため，G をねじれのない可除アーベル群とするとき，G を体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなすことができることを指摘する．このときスカラー m/n（ただし m,n は整数で $n\neq 0$）に対する $(m/n)\vec{v}$ は $n\vec{w}=m\vec{v}$ をみたす唯一の $\vec{w}\in G$ のことと定義される．このスカラー乗法によって G がベクトル空間になることはたやすく確かめられる．次元 $\dim(G)$ は基底のサイズである．あとは，演習問題 I.13.21 の結果を適用すればよい．　□

関連した例をもう一つ．

演習問題 II.13.8　p を素数とし Σ を指数 p の（つまり $\forall x[x^p=1]$ をみたす）無限アーベル群の公理系とする．このとき Σ があらゆる無限基数 κ について κ-範疇的であることを示しなさい．

［ヒント］　Σ のモデルを有限体 $\mathbb{Z}_p$ 上のベクトル空間とみなす．　□

このほかに，標数 p の代数閉体の理論は（p をゼロあるいは任意の素数として）すべての不可算基数 κ について κ-範疇的だけれども $\aleph_0$-範疇的ではないことが知られています．このような体 K の同型類は超越基底のサイズで決まるのです．ここで集合 B が体 K の超越基底であるとは，B が互いに超越的な K の要素の集合であって，K のあらゆる要素が B 上代数的であることをいいます．もしも $|B|\leq\aleph_0$ であれば $|K|=\aleph_0$ であり（したがって可算なモデルが $\aleph_0$ 個存在することになり），$|B|=\kappa\geq\aleph_1$ であれば $|K|=\kappa$ となります．

範疇性についてはもう少し言うべきことがあります．可算な語彙 $\mathcal{L}$ における文の集合 Σ が無矛盾で，無限モデルのみをもつとします（これで定理 II.13.6 の(1)から(3)までがみたされます）．このときモーリーの定理により，Σ が**ある**不可算基数 κ について κ-範疇的であることと**あらゆる**不可算基

数 κ について κ-範疇的であることとは同値になります．通常，このような Σ は **$\aleph_1$-範疇的**と呼ばれます．先ほどの補題と演習問題によれば，$\aleph_1$-範疇的な Σ は $\aleph_0$-範疇的になることもあれば，ならないこともあります．さらに，バルドウィンとラクランの定理によれば，このような Σ が $\aleph_0$-範疇的でないとすれば，互いに同型でないモデルはちょうど $\aleph_0$ 個あり，それらは順序型 $\omega + 1$ の鎖を形成します．たとえば補題 II.13.7 の場合，可算モデルは $\alpha \leq \omega$ なる各 α について α-次元の群をなすわけです．モーリーの定理の証明は文献 [13] や [46] にあります．バルドウィンとラクランの定理については [10] をご覧なさい．

また，$\aleph_0$-範疇的な理論が $\aleph_1$-範疇的になるとは限らないことが，カントールの結果に由来する次の例からわかります．集合 A 上の全順序 $<$ が $\forall x, y[x < y \to \exists z[x < z < y]]$ をみたすとき，$<$ は**稠密**である（あるいは自己稠密である）といいます．稠密全順序の 4 つの例として，実数の区間 $(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1)$, $[0,1]$ があります．これらのモデルが初等的同値でないため，稠密全順序の理論は完全ではありません．しかし，最大要素と最小要素の存在・不存在を指定してやれば，それで 4 とおりの完全な理論ができます．

定義 II.13.9　稠密全順序の公理系に文 $\exists x \forall y[x \leq y]$ と文 $\neg\exists x \forall y[y \leq x]$ を追加して得られる公理の集合を $\Delta^{[)}$ とする．$\Delta^{()}$ と $\Delta^{(]}$ と $\Delta^{[]}$ も同様に定める．

演習問題 II.13.10　語彙 $\mathcal{L} = \{<\}$ における 4 つの理論 $\Delta^{[)}$, $\Delta^{()}$, $\Delta^{(]}$, $\Delta^{[]}$ はいずれも $\aleph_0$-範疇的であって $\aleph_1$-範疇的でない．

[ヒント]　このうちたとえば $\Delta^{()}$ が $\aleph_0$-範疇的であることを示すために，二つの可算モデル A と B を考えて両者の間の同型写像 f を作る．f のことを順序対の集合 $f \subseteq A \times B$ と考え，ちょうど n 個の順序対からなる f_n を選び，f_{n+1} は f_n に 1 個の対を追加したものになるようにして，最後に $f = \bigcup_n f_n$ とする．したがって，まず $f_0 = \emptyset$ である．各 f_n がその定義されている範囲内で順序保存写像になるように作ろう．構成に先立って A と B をそれぞれ $\{a_i : i < \omega\}$, $\{b_i : i < \omega\}$ と数え上げておいて，必ず $a_i \in \mathrm{dom}(f_{2i+1})$ と $b_i \in \mathrm{ran}(f_{2i+2})$ が成立するようにすること．□

ウォシュ-ヴォート条件によって，これら 4 つの理論がいずれも完全であることがわかります．そこで φ をここでの語彙 $\mathcal{L}$ の文とするとき $\Delta^{()} \vdash \varphi$ または $\Delta^{()} \vdash \neg\varphi$ のどちらかが成立し，両方は成立しません．そこで $\Delta^{()} \vdash \varphi$ であるかどうか（同じことですが，$\mathbb{Q}$ あるいは $\mathbb{R}$ などにおいて φ が真であるかどうか）を判定するアルゴリズムを，わたくしたちは手にしたことになります．ただし，このアルゴリズムは恐ろしく非能率的なものです．すなわち $\Delta^{()}$ からのすべてのフォーマルな証明を $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \cdots$ とリストアップさせていって，φ の証明か $\neg\varphi$ の証明を見つけたときに停止させるのです．$\Delta^{()}$ が完全なので，どちらか一方の証明がいずれ見つかるはずです．集合 HF のすべてを順序型 ω でリストアップすることも可能なのですから（演習問題 I.14.14），すべてのフォーマルな証明を順序型 ω でリストアップすることにも，**理論上**は何の問題もありません．しかし実際上は，フォーマルな証明はたくさんありすぎるので，このアルゴリズムは使い物にならないのです．使用に耐えうるアルゴリズムは**量化消去**の方法で得られます．この方法では，稠密全順序のいろいろな事実を利用して，どんな論理式 φ も（$\Delta^{()}$ のもとで）量化記号をもたないなんらかの論理式と同値であることを示します．とくに φ が文である場合は最終的に T か F に行きつくことになります．くわしくは [13] や [46] を見なさい．

完全だけれども，どんな基数 κ についても κ-範疇的でなく，ウォシュ-ヴォート条件が当てはまらない理論もたくさんあります．そうした例の一つに実閉体の理論があります．実閉体とは，順序体（例 II.8.24）のうちで，あらゆる正の要素が平方根をもち，またあらゆる奇数次の多項式が根をもつようなもののことです．ですから $\mathbb{R}$ は一つのモデルですが，$\mathbb{Q}$ は違います．タルスキは実閉体の理論が完全であることを量化消去の方法を用いて証明しました．

どんな無限基数 κ についても κ-範疇的でないが完全な理論の，次に示すような簡単な例が，エーレンフォイヒトによって与えられました．

演習問題 II.13.11　語彙 $\mathcal{L}$ は $<$ の他に各 $n \in \omega$ に対して定数記号 c_n をもつとしよう．両端点のない稠密順序の理論 $\Delta^{()}$ に加えて，各 n について公理 $c_n < c_{n+1}$ を追加した公理系を Σ としよう．Σ が完全でありながらいかなる無限基数 κ についても κ 範疇的でないことを証明しなさい．さらに，

Σ にはサイズ $\aleph_0$ のモデルがちょうど 3 つだけあることを示しなさい.

[ヒント]　完全性を示すために, Σ の $\{<, c_0, \cdots, c_k\}$ への縮小がすべての k について $\aleph_0$-範疇的であることに注意. 3 つの可算モデルとしては, ひとまずモデルを $\mathbb{Q}$ に同定しなさい. このとき, $\sup c_n$ が ∞ である場合と $\mathbb{Q}$ に属する場合と $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に属する場合がある.　□

さて次に Σ をなんらかの可算な語彙 $\mathcal{L}$ で書かれた完全な理論として, $n(\Sigma)$ を Σ の（同型なものを 1 個と数えて）可算無限モデルの個数だとします. エーレンフォイヒトは $n(\Sigma)$ が 2 以外のあらゆる有限の値となる例を挙げ, ヴォートは $n(\Sigma)$ が 2 になることは決してないことを証明しました. $n(\Sigma) = \aleph_0$ となる例はここまでにいくつか挙げてあります. また $n(\Sigma) \leq 2^{\aleph_0}$ であることはたやすく知れますし, 実際 $n(\Sigma) = 2^{\aleph_0}$ となる例もたくさんあります. たとえば次のものがそうです.

演習問題 II.13.12　語彙 $\mathcal{L}$ は $<$ の他に各 $q \in \mathbb{Q}$ に対して定数記号 c_q をもつとしよう. 両端点のない稠密順序の理論 $\Delta^{()}$ に加えて, $p < q$ である有理数のペア $p, q \in \mathbb{Q}$ について公理 $c_p < c_q$ を追加した公理系を Σ としよう. この Σ が完全で, サイズ $\aleph_0$ のモデルをちょうど $2^{\aleph_0}$ 個もつことを証明しなさい.

こうした, なんらかの可算な語彙 $\mathcal{L}$ で書かれた完全な理論 Σ について, $n(\Sigma) \geq \aleph_1$ であれば $n(\Sigma) = 2^{\aleph_0}$ である, という命題を**ヴォートの予想**といいます. *CH* のもとでは自明になりますが, *ZFC* のもとでこの命題が証明できるかどうかは, まだわかっていません. モーリーの [50] では, $n(\Sigma) \geq \aleph_2$ のとき実際 $n(\Sigma) = 2^{\aleph_0}$ となることが証明されています. このことは $2^{\aleph_0} \geq \aleph_3$ であれば自明ではありません.

II.14　等式理論とホーン理論

完全性定理を証明したさい, 言語における項を用いてモデルを構成しました. このように記号表現を数学的対象として利用する方法は, 19 世紀の代数学にその起源を有します. 身近な例の一つとしては, 体 F 上の多項式の環 $F[x]$ や, さらにこの環を用いて F の代数的拡大を得る論法などがあり

ます．他に，これも身近な例として，生成元と基本関係によって与えられる群の概念があります．193 ページで述べた自由群は，この構成で基本関係の集合が空である特別な場合にあたります．こうした代数学における構成の例は，実際にエルブランのモデル $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ の特別な場合になっているのです．このセクションでは，これらの例の特質に着目して，証人を揃える必要もなく極大無矛盾集合に拡大する必要もなしに $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ を利用することが可能であった理由を特定します．

定義 II.14.1　**正のリテラル**とは原子論理式のこと，**負のリテラル**とは原子論理式の否定形のことだとする．一つあるいはそれ以上のリテラルの選言のことを**節**という．節に含まれる正リテラルが高々一つであるときその節を**ホーン節**という．文の集合 Σ がホーン節の全称閉包ばかりからなるとき，Σ を**全称ホーン理論**と呼ぶ．

これらは，この種の文を最初に研究したアルフレッド・ホーンにちなんで名付けられました．ホーン文をめぐる結果の詳細がチャンとキースラーの [13] にあります．

全称ホーン理論の特別の場合として，

定義 II.14.2　文の集合 Σ が**等式理論**であるとは，まず $\mathcal{L}$ が述語記号をもたず，さらに Σ に属するすべての文が（$\tau=\sigma$ の形の）等式の全称閉包になっていることである．

たとえば 139 ページに示した，群の公理系 GP を語彙 $\mathcal{L}=\{\cdot,i,1\}$ で書いたものは等式理論であり，したがって全称ホーン理論でもあります．これと同様に，環の通常の公理系も等式理論であり，それによくある条件，たとえば可換環であるとか単位元 1 をもつ環であるとかの条件をつけたものもそうです．

狭義半順序の公理系（定義 I.7.2）は，ある全称ホーン理論と論理的に同値となります．非反射律 $\forall x \neg R(x,x)$ はゼロ個の正のリテラルと 1 個の負のリテラルからなるホーン節の全称閉包です．推移律は $\forall x,y,z[\,\neg R(x,y)\vee\neg R(y,z)\vee R(x,z)\,]$ と同値で，これは 1 個の正のリテラルと 2 個の負のリテラルからなるホーン節の全称閉包になっています．

ところが，全順序の公理系には三分律の公理が含まれていて，これは 3 個の正のリテラルの選言ですからホーン文ではありません．体の公理（例 II.8.23）は，ゼロでない要素が逆元をもつ，という公理を含みます．選言を用いて書くとこれは $\forall x[\,x = 0 \vee i(x) \cdot x = 1\,]$ で 2 個の正のリテラルからなります．あるいは，これらの公理を全称ホーン文を用いて書き直せるかもしれないじゃないかと思われるかもしれませんが，その可能性は次のようにして否定されます．

演習問題 II.14.3　$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，直積集合 $A \times B$ を宇宙とし，函数と関係を自然な仕方で座標ごとに定めた構造 $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ を定義する．Σ を全称ホーン理論とするとき，$\mathfrak{A} \vDash \Sigma$ かつ $\mathfrak{B} \vDash \Sigma$ ならば $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \vDash \Sigma$ となることを示しなさい．

体の直積は決して体にならないし，2 個以上の要素からなる全順序集合の直積は全順序集合ではないので，体や全順序は全称ホーン文で公理化しようがないのです．なお，直積順序は $a_1 < a_2$ かつ $b_1 < b_2$ のときに $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ とするもので，これを辞書式順序（定義 I.7.12）と混同してはなりません．

順序に関連した理論は語彙 $\mathcal{L}$ に述語記号を含むので，等式理論にならないことは言うまでもありませんが，述語記号を含まない函数記号のみに関する全称ホーン理論の自然な例のなかにも，等式理論にならないものがあります．たとえば Σ を語彙 $\mathcal{L} = \{\,\cdot, i, 1\}$ で書かれた群の公理系 GP に「位数 2 の要素が存在しない」ことを意味する公理 $\forall x[x^2 = 1 \to x = 1]$ を追加したものとしましょう．このとき Σ は等式理論ではありませんが，含意 $x^2 = 1 \to x = 1$ を選言で書き直せば，Σ が全称ホーン理論であることがわかります．もちろんここでも，Σ と同値な等式理論による公理化が存在する可能性はあります．実際それが不可能であることを見るには，群の演算を加法で書きなおして $\mathbb{Z} \vDash \Sigma$ だけれども剰余群 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が Σ のモデルでないことに注意し，次の結果を適用します．

演習問題 II.14.4　Σ が等式理論で $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$ のとき，$\mathfrak{A}$ のあらゆる準同型像が Σ のモデルとなることを証明しなさい．

ここでは $\mathcal{L}$ が述語記号を含まないため，準同型像は，群や環におけるそれとまったく同様に定義できます．

さて，次に閉項モデルについて考えます．

演習問題 II.14.5　Σ が全称ホーン理論で，無矛盾であり，語彙が $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ をみたすと仮定する．このとき $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma) \models \Sigma$ であることを証明しなさい．

つまりこの場合には証人を取り揃えることも極大にすることも必要ないのです．これは，代数学で普通になされる生成元と基本関係による構造の表示の，モデル理論の言葉での定式化です．たとえば群論において，$\mathcal{L} = \{\cdot, i, 1, a, b\}$ とし $\Sigma = GP \cup \{a^2 = b^3 = 1,\ aba = b^2\}$ とすれば，得られる $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ はここに示した基本関係に従う 2 つの要素から生成される（位数 6 の可換でない）群となります． このように群を $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ として記述する方法が，群論のテキストで標準的に用いられる記述（2 つの生成元 a,b をもつ自由群において部分集合 $\{a^2, b^3, abab^{-2}\}$ が生成する正規部分群による剰余群としての記述）と同等であることは，容易にわかります．

次には多項式と体の拡大について考えます．たとえば $\mathbb{C}[z, w]$ というのは複素数を係数とした二つの「変数」z と w の多項式のなす環です．$2\pi wz^3 + 6zw + 2iw^2$ は，そのような多項式の一つです．この $2\pi wz^3 + 6zw + 2iw^2$ と $2w(\pi z^3 + 3z + iw)$ が「同じ」多項式の二つの書き方であると誰でもわかるので，多項式の間には暗黙のうちに同値関係による同一視が働いているわけです．

わたくしたちの定式化によってこの多項式の概念を表現するため，$\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, -\}$ を環論の言語としましょう．Σ を単位元をもつ可換環の公理系，くわしく言えば，演習問題 II.8.23 における公理(1)(2)(3)(4)とします．ここで虚数単位 i とか円周率 π とか，そのほか $2^{\aleph_0}$ 個の $\mathbb{C}$ の要素，これらは $\mathbb{C}$ 上の多項式の正当な係数として認められているのに，それをあらわす定数記号が $\mathcal{L}$ にはありません．それらをあらわすための定数記号を $\mathcal{L}$ に追加する必要があります．

定義 II.14.6　任意の語彙 $\mathcal{L}$ と任意の集合 A について，$\mathcal{L}_A$ とは，$\mathcal{L}$ に新しい定数記号の集合 $\{\, c_a : a \in A \,\}$ を追加した語彙のことである．

これらの定数記号が，お互いに区別されており，もともと $\mathcal{L}$ にあった記号や論理の記号と異なることさえ保証されていれば，(記号 c_a なるものが) 集合論的にどのように同定されるかは，実際上まったく重要ではありません．混乱のおそれのない場合には a そのものを採用することもしばしばあります．とくに次に述べる「ダイアグラム」を論じるときには，通常そのようにするのです．

定義 II.14.7　任意の語彙 $\mathcal{L}$ に対する任意の構造 $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ について，$\mathfrak{A}$ の**自然拡張**とは，c_a を a と解釈することによって得られる $\mathcal{L}_A$ 構造 $\mathfrak{A}_A$ への $\mathfrak{A}$ の拡張のことをいう．次に，$\mathfrak{A}$ の**初等ダイアグラム** $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{A})$ とは，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ すなわち $\mathfrak{A}_A$ において真である $\mathcal{L}_A$ の文全体のなす集合のことである．また，$\mathfrak{A}$ の**ダイアグラム** $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ とは，初等ダイアグラム $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{A})$ に属するすべての，量化記号を含まない文のなす集合のことである．

たとえば $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, -\}$ で構造 $\mathfrak{A}$ が $\mathbb{C}$ における演算の通常の解釈だったとしましょう．すると $c_\pi \neq c_2 \cdot c_2$ は $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ に属します．いっぽう $\exists x[c_\pi = x \cdot x]$ は $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{A})$ に属するけれども $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ には属しません．応用上たいていの場合，これらの文は $\pi \neq 2 \cdot 2$ とか $\exists x[\pi = x \cdot x]$ と書きます．これには混乱を招く危険性が少しばかりあって，というのも，本当は複素数の 1 を環の理論の言語 $\mathcal{L}$ の記号 1 ときちんと区別せねばならないからで，文 $c_1 + c_1 = c_2$ と文 $c_1 + 1 = c_2$ とは本当は別のものなのです．とはいえ，$[c_1 = 1] \in \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ なので，記号をこのように濫用したところで何らかの実際上の混乱を生じることは稀でしょう．わたくしたちは，単に $1 + 1 = 2$ は $\mathbb{C}$ において真だと言っています．

さて多項式環 $\mathbb{C}[z, w]$ の係数は $\mathcal{L}_\mathbb{C}$ から形成されますが，さらに z や w も変数ではなく**定数記号**であるものとします．これは多項式を閉項にするためです．

定義 II.14.8　Σ を $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, -\}$ で書かれた単位元をもつ可換環の公理系とする．$\mathfrak{R} = (R; 0, 1, +, \cdot, -) \models \Sigma$ であるとし，正整数 n を一つ固定する．このとき，多項式環 $R[z_1, \cdots, z_n]$ とは $z_1, \cdots, z_n$ を新しい定数記号としたうえでの $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}_R \cup \{z_1, \cdots, z_n\}, \Sigma \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{R}))$ のことである．

演習問題 II.14.5 によって $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}_R \cup \{z_1, \cdots, z_n\}, \Sigma \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{R})) \vDash \Sigma$ とわかります.

ひとつひとつの多項式は実際には同値類です．先ほどの $\mathbb{C}[z, w]$ の例でいえば，$2\pi wz^3 + 6zw + 2iw^2$ と $2w(\pi z^3 + 3z + iw)$ とは異なる閉項ですが，両者が等しいことが証明できるので，閉項モデルにおいては同じ同値類をあらわすことになります．その証明には，可換環の公理系と，構造 $(\mathbb{C}; 0, 1, +, \cdot, -)$ のダイアグラム $\mathrm{Diag}(\mathfrak{C})$ に含まれる事実たとえば $2 \cdot 3 = 6$ などが用いられます．ここでペダントリーに徹するなら，2 とか 3, 6, π, i というのは c_2, c_3, c_6, c_π, c_i とせねばなりません．また，$6zw$ は $c_6 \cdot (z \cdot w)$ と $(c_6 \cdot z) \cdot w$ のどちらの意味でもありえます．しかし両者が等しいことは Σ に含まれている結合法則によって証明できるのです.

定義 II.14.8 における $\Sigma \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{R})$ という部分についてですが，Σ に属する（結合法則のような，量化記号を用いて書かれた）すべての公理とともに，$\mathrm{Diag}(\mathfrak{R})$ に属する量化記号を含まない文を用います．多項式環を形成するには，より大きい $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{R})$ に属する文を用いるわけにはいきません．代数学においては z と z^3 は常に異なる多項式とみなされますが，特定の環上の多項式としては両者が同じ**多項式函数**をあらわすことがありえます．ということは，$\forall x[x = x^3]$ が $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{R})$ に属することもありうるということです.

初等ダイアグラム $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{R})$ は初等部分モデルの議論で重要になってきます．セクション II.16 を見なさい.

等式理論，自由代数，商構造などの抽象的なレベルの研究は**普遍代数**と呼ばれるもので，これはモデル理論と通常の代数学の中間地点に位置します．この分野について詳しくは，バリスとサンカッパナバールのテキスト [11] を見なさい.

II.15　定義による拡大

ここまでに群の公理を表現するよくある 2 とおりの方法を議論してきました．一つはセクション 0.4 で論じたもので，語彙を $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ として，次に示す公理 $GP = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ を用います.

$$\gamma_1:\ \forall x, y, z[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z],$$

$$\gamma_2:\ \exists u[\forall x[x \cdot u = u \cdot x = x] \wedge \forall x \exists y[x \cdot y = y \cdot x = u]].$$

もう一つの方法は語彙を $\mathcal{L}' = \{\cdot, i, 1\}$ として，次の公理 $GP' = \{\gamma_1, \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}\}$ を用います．

$$\gamma_1:\ \forall x, y, z[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z],$$
$$\gamma_{2,1}:\ \forall x[x \cdot 1 = 1 \cdot x = x],$$
$$\gamma_{2,2}:\ \forall x[x \cdot i(x) = i(x) \cdot x = 1].$$

このうち GP' は等式理論であり GP は（演習問題 II.15.5 で見るとおり）等式理論でないのですが，それでも GP と GP' はある意味で同値なのです．ここでこの同値ということの意味をはっきりさせます．GP' は GP の**定義による拡大**なのです．

ここで論じることは，理論展開において一つや二つの定義をする程度ではおさまらず数千もの定義を必要とする ZFC のような理論を扱う場合に，とりわけ重要です．$\in$ と $=$ 以外の用語が定義され用いられているところではどこでも，ZFC の定義による拡大が行なわれているのです．

定義 II.15.1　$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ であるとし，Σ は $\mathcal{L}$ の文からなる集合とする．

記号 $p \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ が n 項述語記号のとき，$\mathcal{L}, \Sigma$ **上の** p **の定義**とは，θ を $\mathcal{L}$ のなんらかの論理式としたときの $\forall x_1, \cdots, x_n[p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_n)]$ の形の文のことをいう．

記号 $f \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ が n 変数函数記号のとき，$\mathcal{L}, \Sigma$ **上の** f **の定義**とは，θ が $\mathcal{L}$ の論理式で $\Sigma \vdash \forall x_1, \cdots, x_n \exists! y\, \theta(x_1, \cdots, x_n, y)$ であるようなものとしたときの $\forall x_1, \cdots, x_n[\theta(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))]$ の形の文のことをいう．

語彙 $\mathcal{L}'$ の文の集合 Σ' が Σ の**定義による拡大**であるとは，まず $\Sigma' = \Sigma \cup \Delta$ であり，$\Delta = \{\delta_s : s \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}\}$ であって各 $s \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ について δ_s が $\mathcal{L}, \Sigma$ 上の s の定義になっていることをいう．

述語記号の定義の場合は Σ はとくに関係ありません．上の定義で $n = 0$ である場合も，実際にしばしばあります．0 変数函数記号とはつまり定数記号のことです．たとえば語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ で書かれた集合論の展開にさいして，（セクション I.6 で）定数記号 $\emptyset$ を，論理式 $\theta_\emptyset$ として $\mathrm{emp}(y)$ すなわち $\forall x(x \notin y)$ を使って導入したのでした．Σ を ZF 集合論（あるいは外延性の公理と内包図式だけ）として $\exists! y\ \mathrm{emp}(y)$ を Σ から証明しましたので，語彙

$\{\in, \emptyset\}$ における文 $\mathrm{emp}(\emptyset)$ を $\delta_\emptyset$ とすれば，理論 $\Sigma' = \Sigma \cup \{\delta_\emptyset\}$ は，Σ の定義による拡張，というわけです．0 項述語記号は命題定項です．集合論における例としては連続体仮説 CH があります．ここでは θ_{CH} は CH と同値な文を $\in$ と $=$ だけを用いて書いたものということになります．もちろん，そんな文を書き下そうなどとは思いもよりません．CH のことは，補題 II.15.3 で述べるような定義による拡大の連鎖のあとに登場すると考えたほうがよいのです．

群の $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ と $\mathcal{L}' = \{\cdot, i, 1\}$ による定式化の例に戻れば，γ_2 が存在を保証する単位元と逆元の一意性が GP から証明できます．そこで，単位元を定義する $\theta_1(y)$ としては $\gamma_{2,1}$ の示唆どおり $\forall x[x \cdot y = y \cdot x = x]$ を採用しますが，これは実は $y \cdot y = y$ であってもよいわけです．単位元 1 を用いずに $\cdot$ だけを用いて逆元を定義するには，$\theta_i(x, y)$ として $y \cdot (x \cdot x) = x$ を採用できるでしょう．そうすると GP' は GP に $\theta_1(1)$ と $\forall x\, \theta_i(x, i(x))$ を追加した公理系となります．これが公理系 $\{\gamma_1, \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}\}$ と同値になることはたやすくわかります．

定義による拡大が本質的に新しいことは何も付け加えない，ということを正確に述べると，次のようになります．

定理 II.15.2　$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ であるとし，Σ は $\mathcal{L}$ の文からなる集合とする．また $\mathcal{L}'$ の文からなる集合 Σ' は Σ の定義による拡大であるものとする．以下では論理式 χ のなんらかの全称閉包を $\forall\forall\chi$ と表記する（定義 II.5.6 と補題 II.8.3 を参照のこと）．このとき，

（1）φ を $\mathcal{L}$ の任意の文とするとき $\Sigma \vdash \varphi$ と $\Sigma' \vdash \varphi$ とは同値．

（2）φ を $\mathcal{L}'$ の任意の論理式とするとき，それと同じ自由変数を用いる $\mathcal{L}$ の論理式 $\widehat{\varphi}$ が存在して $\Sigma' \vdash \forall\forall[\varphi \leftrightarrow \widehat{\varphi}]$ となる．

（3）τ を $\mathcal{L}'$ の任意の項とするとき，τ と同じ変数を用い，追加の変数 y をもつ $\mathcal{L}$ の論理式 $\zeta_\tau(y)$ が存在して $\Sigma \vdash \forall\forall\exists! y \zeta_\tau(y)$ かつ $\Sigma' \vdash \forall\forall\zeta_\tau(\tau)$ となる．

このうち(1)単独では Σ' が Σ の**保守的拡大**であるという主張になります．これについては演習問題 II.12.23 も見なさい．たとえば群の理論において消約律 $\forall u, v, w[u \cdot w = v \cdot w \to u = v]$ を証明したかったとしましょう．

これには右から w^{-1} をかけるだけでよいので GP' で証明したほうが簡単なのですが，(1) によればこのとき GP での証明も見つかるわけです．

項目 (2) によると φ と $\widehat{\varphi}$ は，定義 II.8.4 の意味で，Σ' のもとで同値です．項目 (2) (3) によれば Σ' には新しい表現力はなくて，$\mathcal{L}'$ で表現できるものはすべて $\mathcal{L}$ だけで表現できるのです．このことは ZFC の展開において重要です．定義された概念を含む式 $\varphi(x)$ に内包公理を用いて集合 $\{x \in w : \varphi(x)\}$ を作ることが頻繁にあります．しかしこの公理の本来の言明（セクション I.6 参照）では，論理式は $\in$ と $=$ だけを用いて書かれるものでした．145 ページでインフォーマルに指摘したとおり，φ が $\in$ と $=$ だけを用いて書かれたなんらかの式 $\widehat{\varphi}$ と同値であるおかげで，φ に内包公理を適用することも合法的にできるのです．

【定理 II.15.2 の証明】　(1) についてはまず $\Sigma \subseteq \Sigma'$ なので $\Sigma \vdash \varphi$ ならば $\Sigma' \vdash \varphi$ である．逆に $\Sigma' \vdash \varphi$ であったとして，仮に $\Sigma \nvdash \varphi$ だったとする．このとき，完全性定理によって $\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A} \models \Sigma$ かつ $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ となるようにとれる．各 $s \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ について δ_s が $\mathfrak{A}$ において真であるように $s_{\mathfrak{A}'}$ を定義することにして，$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}'$ 構造 $\mathfrak{A}'$ に拡張しよう．そうすると $\mathfrak{A}' \models \Sigma'$ かつ $\mathfrak{A}' \models \neg\varphi$ となって $\Sigma' \vdash \varphi$ に矛盾する．

(3) については τ に関する帰納法を用いる．τ が変数記号 x のときは $\zeta_\tau(y)$ としては $y = x$ をとればよい．τ が $f(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ で $n \geq 0$ で $f \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ のときは $\zeta_\tau(y)$ として

$$\exists z_1, \cdots, z_n[\delta_f(z_1, \cdots, z_n, y) \wedge \zeta_{\sigma_1}(z_1) \wedge \cdots \wedge \zeta_{\sigma_n}(z_n)]$$

を用いる．$f \in \mathcal{L}$ の場合はこの $\delta_f(z_1, \cdots, z_n, y)$ のところを $f(z_1, \cdots, z_n) = y$ に書き換えればよろしい．

(2) については φ に関する帰納法を用いるが，問題となるのは帰納法の基礎となる φ が原子論理式 $p(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ である場合だけで，その場合は (3) を用いて処理すればよい．$p \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ の場合は $\widehat{\varphi}$ を

$$\exists z_1, \cdots, z_n[\theta_p(z_1, \cdots, z_n) \wedge \zeta_{\sigma_1}(z_1) \wedge \cdots \wedge \zeta_{\sigma_n}(z_n)]$$

としよう．$p \in \mathcal{L}$ の場合はこの $\theta_p(z_1, \cdots, z_n)$ の部分を $p(z_1, \cdots, z_n)$ に書き換える．p が $=$ の場合もそのようにする．　□

公理論的な数学の展開においては定義による拡大の連鎖がしばしば見られます．たとえば群論においては $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ で定義される交換子がよく用いられます．この $[x_1, x_2]$ は 2 変数函数なのでここでは $c(x_1, x_2)$ と書いたほうがよいでしょう．さてそうすると，$\mathcal{L} = \{\cdot\}$，$\mathcal{L}' = \{\cdot, i, 1\}$，$\mathcal{L}'' = \{\cdot, i, 1, c\}$ であって，$GP'' = GP' \cup \{\forall x_1, x_2\, \theta_c(x_1, x_2, c(x_1, x_2))\}$ は GP' の定義による拡大であり，その GP' がまた GP の定義による拡大であるわけです．次の補題はこうした定義による拡大の連鎖がいつでも 1 回の定義による拡大で実現できると言っています．なお，ここでの函数 $c(x_1, x_2)$ の導入は定義 II.15.1 の特別な場合で，というのも，$\theta_c(x_1, x_2, y)$ は $y = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ で，この場合 $\forall x_1, x_2 \exists! y \theta_c(x_1, x_2, y)$ は論理的に妥当であって $\emptyset$ から証明できるのです．

補題 II.15.3　$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}''$ であり，Σ は $\mathcal{L}$ の文からなる集合であり，Σ' は $\mathcal{L}'$ の文からなる集合であり，Σ'' は $\mathcal{L}''$ の文からなる集合であるとしよう．Σ' が Σ の定義による拡大であり，Σ'' が Σ' の定義による拡大であると仮定する．このとき Σ'' は Σ のある定義による拡大と同値となる．

【証明】　定義 II.15.1 を適用するなら $\Sigma' = \Sigma \cup \Delta$，$\Sigma'' = \Sigma \cup \Delta \cup \Delta'$ となっていて，ここで Δ は $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ に属する記号の定義からなり，Δ' は $\mathcal{L}'' \setminus \mathcal{L}'$ に属する記号の定義からなる．Δ に属する各 δ_s は $\mathcal{L}$ の論理式 θ_s を用いた $s \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ の定義であり，Δ' に属する各 δ_s は $\mathcal{L}'$ の論理式 θ'_s を用いた $s \in \mathcal{L}'' \setminus \mathcal{L}'$ の定義である．

そこで，n 項述語記号 $p \in \mathcal{L}'' \setminus \mathcal{L}'$ に対しては，定理 II.15.2 によって $\mathcal{L}$ の論理式 $\widehat{\theta}_p$ を $\Sigma' \vdash \forall\forall[\theta'_p \leftrightarrow \widehat{\theta}_p]$ となるようにとり，文 $\widetilde{\delta}_p$ を $\forall x_1, \cdots, x_n[p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \widehat{\theta}_p(x_1, \cdots, x_n)]$ と定める．また n 変数函数記号 $f \in \mathcal{L}'' \setminus \mathcal{L}'$ に対しても同様に $\mathcal{L}$ の論理式 $\widehat{\theta}_f$ をとって $\widetilde{\delta}_f$ を $\forall x_1, \cdots, x_n\, \widehat{\theta}_f(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$ と定める．

そのうえで $\widetilde{\Delta'} = \{\widetilde{\delta}_s : s \in \mathcal{L}'' \setminus \mathcal{L}'\}$ とすれば，$\Sigma \cup \Delta \cup \widetilde{\Delta'}$ は Σ の定義による拡大であり，Σ'' と同値である．　□

実のところ，群の交換子 $[x_1, x_2]$ を $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ 上で直接 $y = [x_1, x_2]$ とは $x_1x_2 = x_2x_1y$ のことだと定義してしまうことも多いので，先ほどの例は少々わざとらしい例だったのです．

補題 II.15.3 は ZFC のような理論の展開にさいしてはもっとずっと重要です．たとえば CH という命題定項を定義するにあたっては，わたくしたちは θ_{CH} を（定義 I.13.8 をフォーマルに書き直すことで）直接もともとの $\mathcal{L}=\{\in\}$ で表現するのでなく，長い定義の連鎖の末に，ある $\mathcal{L}'$ で表現することでしょう．

定義による拡大への移行によって「等式理論」の概念も変化します．たとえば群の理論は語彙 $\{\cdot, i, 1\}$ で書くとき等式理論になりますが，（演習問題 II.15.5 で見るように）語彙 $\{\cdot\}$ で書くとそうならないのです．いっぽう，体の理論をどのように定義によって拡張したところで，等式理論にはならないし，全称ホーン理論にすらなりません．体であることが直積で保たれないからです（演習問題 II.14.3 参照）．

演習問題 II.15.4　語彙 $\mathcal{L}=\{\vee, \wedge\}$ で書かれた束の理論が等式理論であることを示しなさい．

[ヒント]　束はしばしば任意の 2 要素 x と y の最小上界 $x \vee y$ と最大下界 $x \wedge y$ の存在する半順序集合 $(A; <)$ として定義される．このとき $\vee$ と $\wedge$ は定義された概念である．$\mathcal{L}=\{\vee, \wedge\}$ のもとで束を公理化するには，等式

$$
\begin{aligned}
&x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z && x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\
&x \vee y = y \vee x && x \wedge y = y \wedge x \\
&x \vee x = x && x \wedge x = x \\
&x \wedge (x \vee y) = x && x \vee (x \wedge y) = x
\end{aligned}
$$

を用いる．このときには，順序のほうが定義された概念になる．$x \leq y$ を $y = x \vee y$ と定義すればよい．これが $x = x \wedge y$ とも同値になることを公理にもとづいてチェックしなさい．$x < y$ は $x \leq y$ かつ $x \neq y$ ということだとする．このときもちろん，$<$ が半順序であって $\vee$ と $\wedge$ がこの半順序にもとづいて定めた最小上界および最大下界と一致することを確かめる必要がある．束の理論について詳しくは [11] の第 I 章を見なさい．　□

このとき，全順序を $\forall x, y[x \wedge y = x$ または $x \wedge y = y]$ をみたす束と見ることができます．しかし全順序であることは直積で保たれないので，この式を全称ホーン文で書けないのは体の場合と同様です．

演習問題 II.15.5 語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合 Σ が**全称的**であるとは，Σ に属するすべての文が量化記号を含まない論理式の全称閉包であることをいう．Σ が全称的で $\mathfrak{B} \vDash \Sigma$ で，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の部分構造のとき $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$ となることを証明しなさい．とくに，群の部分半群が群とは限らないことから，語彙 $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ における群の公理系は全称的でありえない．

II.16 初等部分モデル

定義 II.8.17 で述べた**部分構造**の概念を振り返りましょう．$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ とは，$A \subseteq B$ であり，$\mathfrak{A}$ の函数と述語がそれに対応する $\mathfrak{B}$ の函数と述語の A への制限になっていることをいうのでした．同じことがすべての定義可能な性質について成立することを要請するのが，より強い**初等部分構造**の概念です．

定義 II.16.1 $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が $\mathcal{L}$ の構造で $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ であるものとする．φ を $\mathcal{L}$ の論理式とするとき，$\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ ということを，φ に対する A への任意の割り当て σ について $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\sigma]$ と $\mathfrak{B} \vDash \varphi[\sigma]$ が同値であることと定義する．$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$（$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の**初等部分構造**あるいは**初等部分モデル**である）とは $\mathcal{L}$ のすべての論理式 φ について $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ となることをいう．

補題 II.16.2 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ のとき，量化記号を含まない論理式 φ についてはいつでも $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ となる．

定義 II.16.3 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が**モデル完全**であるとは，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vDash \Sigma$ かつ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ をみたす $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ について必ず $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ となることをいう．

一例として $\mathcal{L} = \{<\}$，$A = [0,1] \subseteq B = [0,2] \subseteq \mathbb{R}$ とし，$<$ を普通どおりに解釈して $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ を得たとしましょう．すると $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ なので $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$（初等的同値，定義 II.13.1）であり，$\mathcal{L}$ の文 φ については $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ です．しかし $\varphi(x)$ を論理式 $\exists y[x < y]$ とすれば $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi[1]$ であり $\mathfrak{B} \vDash \varphi[1]$ であって $\mathfrak{A} \not\preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ ですから $\mathfrak{A} \not\preccurlyeq \mathfrak{B}$ です．

次に開区間で考えます．なにしろ $\mathcal{L}$ のすべての論理式の意味するところを二つの構造において調べなければならないのですから自明なことではありませんが，この $\mathcal{L}$ に関して $(0,1) \preccurlyeq (0,2)$ となります．実のところ理論 $\Delta^{()}$（定義 II.13.9 参照）はモデル完全なのです．これについては演習問題

II.16.11 と II.16.13 からわかります．$[0,1] \not\preccurlyeq [0,2]$ という例があるので $\Delta^{[]}$ はモデル完全でありません．同様の例を考えれば $\Delta^{[)}$ も $\Delta^{(]}$ もモデル完全でありません．

初等部分モデルに関する基本的な諸結果には 2 種類あります．一つには，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の理論に特有の（たとえばモデル完全性などの）事項に着目して $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ を結論するものです．もう一つは**レーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理**で，これはモデルの濃度にだけ関係します．たとえば $\mathcal{L}$ が可算で $\mathfrak{B}$ が任意の $\mathcal{L}$ 構造であれば，必ずある可算な $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ となるのです．この結果は，ある可算な $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ となるというレーヴェンハイム-スコーレム定理（補題 II.13.4 参照）と縁続きのものです．$\mathfrak{B}$ の初等部分構造 $\mathfrak{A}$ を得るために次の補題を用います．この補題によれば，$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ とは $\mathfrak{A}$ がある種の演算のもとで閉じていること，と表現できます．

補題 II.16.4（タルスキ-ヴォート条件）　$\mathfrak{B}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とし $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ とするとき，次のことは互いに同値である．

（1）$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

（2）$\mathcal{L}$ の任意の存在論理式 $\varphi(\vec{x})$（すなわち $\exists y \psi(\vec{x}, y)$ の形の論理式 φ）と任意の $\vec{a} \in A$ に対して，もしも $\mathfrak{B} \vDash \varphi[\vec{a}]$ ならば，ある $b \in A$ について $\mathfrak{B} \vDash \psi[\vec{a}, b]$ である．

ここでベクトル記法 $\varphi(\vec{x})$ は，φ のすべての自由変数を $x_1, \cdots, x_n$（ただし $n \geq 0$）と書き並べた長い記法 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を短縮する，よく用いられる記法です．そこで $\vec{a} \in A$ というのは A の要素の n 組という意味になります．定義によれば $\mathfrak{B} \vDash \varphi[\vec{a}]$ はある $b \in B$ について $\mathfrak{B} \vDash \psi[\vec{a}, b]$ となるということですが，条項(2)はこの b を実は A の要素からとれることを主張しています．(1)と違って(2)は $\mathfrak{A} \vDash$ にはいっさい触れず $\mathfrak{B} \vDash$ だけで書かれています．大きな $\mathfrak{B}$ が与えられ，その小さな初等部分モデル $\mathfrak{A}$ を得たい，という場合には，(2)を集合 A がある種の演算のもとで閉じているという条件と見て，この条件をみたすように，小さい A を作ります．この構成が済まないことには集合 A が存在しませんから，$\mathfrak{A} \vDash$ には言及しようもないのです．

【補題 II.16.4 の証明】　(1) ⇒ (2)：$\vec{a} \in A$ かつ $\mathfrak{B} \vDash \varphi[\vec{a}]$ とすると，$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ なので $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$ である．$\vDash$ の定義により，ある $b \in A$ について $\mathfrak{A} \vDash$

$\psi[\vec{a},b]$ であり，ふたたび $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ により，$\mathfrak{B} \vDash \psi[\vec{a},b]$ となる．

(2) $\Rightarrow$ (1)：(2)が成立していると仮定し，論理式 φ の量化記号の個数に関する帰納法で $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathfrak{B}$ を示そう．φ に量化記号が含まれない場合，これは補題 II.16.2 である．次に φ に一つ以上の量化記号が含まれていて，それより量化記号が少ない論理式について結果が成り立つと仮定しよう．φ が（ポーランド記法において）命題演算子で始まる式の場合の帰納法のステップは自明だから，φ は $\exists$ あるいは $\forall$ で始まるものとしよう．

いま $\varphi(\vec{x})$ が $\exists y\psi(\vec{x},y)$ であったとすれば，$\vec{a} \in A$ を固定するごとに

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi[\vec{a}] &\iff \exists b \in A\bigl(\mathfrak{A} \vDash \psi[\vec{a},b]\bigr)\\ &\iff \exists b \in A\bigl(\mathfrak{B} \vDash \psi[\vec{a},b]\bigr) \iff \mathfrak{B} \vDash \varphi[\vec{a}]\end{aligned}$$

となることから $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathfrak{B}$ が示される．ここで，一つ目の $\iff$ は $\vDash$ の定義により，二つ目は帰納法の仮定 $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\psi} \mathfrak{B}$ により，三つ目のうち $\Rightarrow$ は $\vDash$ の定義により，$\Leftarrow$ は(2)による．

あとは φ が $\forall y\psi$ だった場合，φ は $\neg\exists y\neg\psi$ と論理的に同値であり，先ほどの $\exists$ に関する帰納法の議論を利用できる．□

この補題の (2) $\Rightarrow$ (1) をこのあと定理の証明に用いますが，次の演習問題のように，(1) $\Rightarrow$ (2) が利用できる場面もあります．

演習問題 II.16.5　$\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, -, i\}$ とし $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は体（例 II.8.23 を参照）であり $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ であるものとする．$\tau(x)$ を A に係数をもつ多項式とするとき，B における $\tau(x)$ の根はすべて A に属することを示しなさい．

［ヒント］　たとえば τ が B において 3 つの根をもつとしよう．(2)を $\exists y(\tau(y) = 0)$ に適用して根 $b_1 \in A$ を得る．次に(2)を $\exists y(\tau(y) = 0 \wedge y \neq b_1)$ に適用して他の根 b_2 を得る．それから(2)を $\exists y(\tau(y) = 0 \wedge y \neq b_1 \wedge b_2 \neq b_2)$ に適用して第 3 の根 b_3 を得る．□

ここでは τ の根の個数が τ の次数を越えないという事実に訴える必要があるので，演習問題 II.16.5 は斜体においては成立しない場合があります．たとえば $\mathfrak{B}$ が四元数体で $\tau(x)$ が $x^2 + 1$ の場合に $\mathfrak{A}$ を次の下向きレーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理で得ればそうなります．

定理 II.16.6（下向きレーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理）　$\mathfrak{B}$ を語

彙 $\mathcal{L}$ の任意の構造とし，基数 κ を $\max(|\mathcal{L}|, \aleph_0) \le \kappa \le |B|$ の範囲にとり，$S \subseteq B$ を $|S| \le \kappa$ となるようにとったとする．このとき，$\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{A}$ が存在して，$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$，$S \subseteq A$，$|A| = \kappa$ となる．

【証明】　補題 II.16.4 のでいうところの存在論理式 φ に対して，それぞれそのスコーレム函数 f_φ を次のように選ぶ：φ に n 個の自由変数があるとしてそれを $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ と書き並べて φ を $\varphi(\vec{x})$ と表記しよう．すると $\varphi(\vec{x})$ は $\exists y \psi(\vec{x}, y)$ という形になっている．$f_\varphi \colon B^n \to B$ は，選択公理を用いて，各 $\vec{a} \in B$ に対し，もしも $\mathfrak{B} \vDash \varphi(\vec{a})$ なら $\mathfrak{B} \vDash \psi(\vec{a}, f_\varphi(\vec{a}))$ となるようにする．すなわち $\mathfrak{B} \vDash \psi[\vec{a}, b]$ をみたす $b \in B$ が存在するならばそのような b の一つを $f_\varphi(\vec{a})$ とする．そのような $b \in B$ が存在しない場合は $f_\varphi(\vec{a})$ の値は任意である．ここで n は φ に依存していて $n = n_\varphi$ と書くべきで，したがって $f \colon B^{n_\varphi} \to B$ である．

部分集合 $A \subseteq B$ が $\mathcal{L}$ のすべての存在論理式 φ について $f_\varphi(A^{n_\varphi}) \subseteq A$ をみたすとき，**スコーレム閉集合**であるという．これから作る A もそのような集合である．

まず $n = n_\varphi = 0$ のときにこのことが何を意味するかを考えてみよう．0 変数の函数とは実質的には定数である．よりフォーマルに，φ が文 $\exists y \psi(y)$ であったとしよう．$B^0 = \{\emptyset\}$ であり，（φ に依存した）ある $b \in B$ について $f_\varphi(\emptyset) = b$ となっていて，もしも $\mathfrak{B} \vDash \varphi$ ならば $\mathfrak{B} \vDash \psi[b]$ である．A がスコーレム閉集合なら，$b = f_\varphi(\emptyset) \in A$ である．とくに，φ として $\exists y[y = y]$ をとれば，$A \neq \emptyset$ であることがわかる．

また，スコーレム閉集合 A は $\mathcal{L}$ のすべての函数のもとで閉じている．すなわち，g を $\mathcal{L}$ の n 変数函数記号とするとき，函数 $g_\mathfrak{B} \colon B^n \to B$ について $g_\mathfrak{B}(A^n) \subseteq A$ となる．これを示すには，$\varphi(\vec{x})$ として $\exists y[g(\vec{x}) = y]$ をとればスコーレム函数 f_φ が $g_\mathfrak{B}$ と一致することに注意すればよい．

ここで，A を宇宙とする $\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{A}$ を，$\mathcal{L}$ のすべての n 変数函数記号 g について $g_\mathfrak{B} \restriction A^n$ を $g_\mathfrak{A}$ と定め，また $\mathcal{L}$ のすべての n 項述語記号 p について $p_\mathfrak{A} = p_\mathfrak{B} \cap A^n$ と定めることで定義しよう．とくに函数記号については，$g_\mathfrak{B}(A^n) \subseteq A$ を利用して，この定義が正当であること，すなわち $g_\mathfrak{A} \colon A^n \to A$ となっていることが示される．

特別なケースとして $n = 0$ のとき，$g \in \mathcal{L}$ は定数記号であり，このとき

$g_{\mathfrak{A}} = g_{\mathfrak{B}}$ であってこの値はスコーレム閉集合 A に属する．$p \in \mathcal{L}$ が命題定項のときは，$p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}} \in \{T, F\}$ とする．

さてこうしてスコーレム閉集合 A から構造 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ を得れば，補題 II.16.4 からただちに $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ であることがわかる．とすると，あとは $S \subseteq A$ かつ $|A| = \kappa$ となるようなスコーレム閉集合 A を作れば証明は終わる．ここで $|S| = \kappa$ と仮定してもさしつかえない．$|S| < \kappa$ だったとしたら S をそれを含むより大きな集合に置き換えればいいのだから．

語彙 $\mathcal{L}$ のすべての存在論理式からなる集合を $\mathcal{E}$ としよう．$T \subseteq B$ のとき，$T^* = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{E}} f_\varphi(T^{n_\varphi})$ とする．$\varphi(x)$ として $\exists y[x = y]$ をとれば，$n_\varphi = 1$ であり f_φ は恒等函数になるから，$T \subseteq T^*$ である．また，T^* は $|\mathcal{E}|$ 個（κ 個以下）の集合 $f_\varphi(T^{n_\varphi})$ の和集合であり，個々の $f_\varphi(T^{n_\varphi})$ のサイズも $|T^{n_\varphi}| \leq \kappa$ を越えないので，もしも $|T| = \kappa$ であれば $|T^*| = \kappa$ となる．集合列 $S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$ を，各 $i \in \omega$ について $S_{i+1} = (S_i)^*$ として作り，$A = \bigcup_{i \in \omega} S_i$ としよう．すると各 i で $|S_i| = \kappa$ であるから $|A| = \kappa$ である．さらに，A はスコーレム閉集合である．なぜならどんな $\vec{a} \in A$ もある i について $\vec{a} \in S_i^{n_\varphi}$ であり，したがって $f_\varphi(\vec{a}) \in S_{i+1} \subseteq A$ であるから．
□

この証明の例として，例 II.8.24 でやったように $\mathcal{L}' = \{0, 1, +, \cdot, -, i, <\} = \mathcal{L}_{OR} \cup \{i\}$ として，$\mathfrak{B}$ を実数全体で $\mathcal{L}'$ の記号を自然に解釈したものとします．$S = \emptyset$ から出発すれば可算な $\mathfrak{A}$ で $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ となるものが作れます．A に実際にどのような実数が入ることになるかはスコーレム函数のとりかたに依存します．ただし，演習問題 II.16.5 によれば，すべての代数的実数が A に属することになります．というのも，代数的実数は整数係数の多項式の根になっているからです．

ここでは一般のモデルに関するレーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理を適用してなんらかの可算な $\mathfrak{A}$ の存在を示したのですが，実際には，$\mathfrak{B}$ が実数全体の順序体の場合，タルスキの名高い結果により，A としては代数的実数全体をとればよいことがわかっています．このことを証明する一つの方法は，**実閉体**の理論がモデル完全であることを示すことです．そうすれば $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ であることは $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ であることから導かれるわけです．実閉体の理

論は，例 II.8.24 の順序体の理論に加えて，すべての奇数次の多項式が根をもつこと（これは無限個の公理のリストになります）と，すべての正の要素が平方根をもつと主張する公理からなります．実数の全体や代数的実数の全体は明らかに実閉体のモデルになりますが，実閉体の理論がモデル完全であることを証明するのは簡単ではありません．証明には，実閉体の公理系が，どの多項式が根をもつかを精査する解析を可能にしてくれる，という事実が用いられます．くわしくは文献 [13][46] を見なさい．

この例からわかるとおり，モデル理論においては，一般的な公理系についての一般的な結果と特定の代数系についての詳細な結果とが渾然一体となっています．

定理 II.16.6 が**下向き**レーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理と呼ばれていたわけは，それが初等部分モデルを作る定理だったからです．初等拡大モデルを作る**上向き**定理は，ダイアグラムを用いて容易に証明できます．

定理 II.16.7（**上向きレーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理**）　$\mathfrak{B}$ を任意の無限な $\mathcal{L}$ 構造とする．$\kappa \geq \max(|\mathcal{L}|, |B|)$ である基数 κ を固定する．このとき $\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{C}$ が存在して $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ かつ $|\mathfrak{C}| = \kappa$ となる．

【証明】　定義 II.14.7 のとおり，言語 $\mathcal{L}_B = \mathcal{L} \cup \{c_b : b \in B\}$ で書かれた $\mathfrak{B}$ の初等ダイアグラムを $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{B})$ とする．このとき $\mathrm{eDiag}(\mathfrak{B})$ はモデル（すなわち $\mathfrak{B}$）をもち，基数 κ は $\kappa \geq \max(|\mathcal{L}_B|, \aleph_0)$ をみたす．そこで通常のレーヴェンハイム-スコーレム定理（II.7.17）により，$\mathrm{eDiag}(\mathfrak{B})$ がサイズ κ のモデル $\mathfrak{C}$ をもつことがわかる．ここで $\mathfrak{C}$ においては c_b が実物 b と解釈されていると仮定してさしつかえない．このとき $\mathfrak{C} \models \mathrm{eDiag}(\mathfrak{B})$ から $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ が導かれる．　□

とくに，任意の無限な構造は真の初等拡大をもちます．このことの簡単な応用が次の演習問題で与えられます．

演習問題 II.16.8　記号 S を 1 変数函数記号として $\mathcal{L} = \{<, S\}$ とし，$\mathfrak{B} = (\omega; <, S)$ とする．後者の S は後者函数である．

（１）　$\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ であれば ω は C の始切片である．

（２）　$\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ であるとき，$c \in \omega$ ならば $\Phi(c) = c$ とし $c \notin \omega$ ならば

$\Phi(c) = S(c)$ として $\Phi\colon C \to C$ を定義する．このとき Φ は $\mathfrak{C}$ の自己同型写像（$\mathfrak{C}$ から $\mathfrak{C}$ の上への同型写像）である．

（３） $E = \{\, 2n : n \in \omega \,\}$ とする．E は $\mathfrak{B}$ において定義可能でない．すなわち，$\mathcal{L}$ のいかなる論理式 $\varphi(x)$ についても，$\mathfrak{B} \vDash \varphi[a]$ であることと a が偶数であることとは同値にならない．

[ヒント] (2)については，0 と異なる要素はどれも直前の要素をもつことを用いる．(3)について，$\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ かつ $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{C}$ としよう．(3)にいうような論理式 φ があれば $\mathfrak{B} \vDash \forall x[\varphi(x) \leftrightarrow \neg\varphi(S(x))]$ であり，この文は $\mathfrak{C}$ でも成立する．ところが(2)の同型写像を用いれば，このことから矛盾が得られる． □

モデル完全性は [13] や [46] のようなモデル理論のテキストにおいて大いに研究されています．次にいくつかの演習問題において，いくつかの簡単な場合に $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ となる具体的な証明を与え，また，モデル完全な理論の簡単な例を与えます．まず文献 [13] の演習問題 3.1.1 からです．

演習問題 II.16.9 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ であったとし，すべての $a_1, \cdots, a_n \in A$ と $b \in B$ に対して，$\mathfrak{B}$ の自己同型写像 Φ で $\Phi(b) \in A$ かつ各 i で $\Phi(a_i) = a_i$ となるものが存在したとする．このとき $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ であることを証明しなさい．

[ヒント] 補題 II.16.4 を用いなさい．

演習問題 II.16.10 演習問題 II.16.9 の結果を用い，指数 p（素数）の無限アーベル群の対 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ について $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ となることを証明し，その理論がモデル完全であることを示しなさい． □

演習問題 II.13.8 によれば，この理論はまた完全でもあるわけです．

演習問題 II.16.11 演習問題 II.16.9 の結果を用い，語彙 $\mathcal{L} = \{<\}$ のもとで $(0,1) \preccurlyeq (0,2)$ となることを証明しなさい．同じく演習問題 II.16.9 の結果を用い，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が $\Delta^{()}$ の可算モデルで $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ であれば $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ となることを示しなさい．

[ヒント] $(0,1) \preccurlyeq (0,2)$ については区分的線形な自己同型写像を利用できる．可算な $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の場合は演習問題 II.13.10 のように進めなさい． □

この演習問題だけでは，$\Delta^{()}$ がモデル完全だとは言えません．これは自

己同型写像がいつでもたやすく得られるとは限らないからです．たとえば $A = (0, 1)$，$B = (0, 1) \cup \mathbb{Q}$ のときは B の自己同型写像で 2 を A の要素に写すことはできないので，演習問題 II.16.9 が適用できないのです．次の演習問題を用いた後ならば，II.16.9 が適用できるようになります．

演習問題 II.16.12　語彙 $\mathcal{L}$ が可算で，$\mathcal{L}$ の理論 Σ は無矛盾だが有限モデルをもたないものとする．κ を任意の無限基数とし，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Sigma$，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ かつ $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| = \kappa$ のときには必ず $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ となるものと仮定する．このとき Σ がモデル完全であることを示しなさい．

［ヒント］　この演習問題は，言語 $\mathcal{L}$ を拡張することでモデルの対 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を **1 個の**対象とみて，そのうえでこの対象にモデル理論の手法を適用できる，という一例になっている．P を 1 項述語記号，f を 1 変数函数記号として $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{P\}$，$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}' \cup \{f\}$ とする．Σ がモデル完全でなかったと仮定して $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Sigma$，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ だが $\mathfrak{A} \not\preccurlyeq \mathfrak{B}$ となるような対 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ をとる．P を A によって解釈することで $\mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}'$ 構造に拡張する．これにレーヴェンハイム-スコーレム定理を適用すれば $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ を $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1 \models \Sigma$，$\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{A}_1 \not\preccurlyeq \mathfrak{B}_1$ で $|\mathfrak{B}_1| = \aleph_0$ となるようにとれて，このとき $|\mathfrak{A}_1| = \aleph_0$ でもある．f を A_1 から B_1 への全単射によって解釈することで $\mathfrak{B}_1$ を $\mathcal{L}''$ 構造 $\mathfrak{B}_1''$ に拡張する．この $\mathfrak{B}_1''$ にレーヴェンハイム-スコーレム定理を適用すれば，$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ を $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2 \models \Sigma$，$\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{B}_2$，$\mathfrak{A}_2 \not\preccurlyeq \mathfrak{B}_2$ で $|\mathfrak{A}_2| = |\mathfrak{B}_2| = \kappa$ となるようにとれる．□

演習問題 II.16.9 とともにこの結果を $\kappa = \aleph_0$ として用いることにより，

演習問題 II.16.13　$\mathcal{L} = \{<\}$ として $\Delta^{()}$ がモデル完全であることを示しなさい．

演習問題 II.16.9 とともに同じ結果を $\kappa > \aleph_0$ として用いることにより，

演習問題 II.16.14　$\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ として，ねじれのない無限な可除アーベル群の理論がモデル完全であることを示しなさい．

実際にはより強く，この二つの理論では量化消去（209 ページ，および [46]）ができます．続く三つの演習問題では，論理式の「標準形」についての結果

を証明します．

演習問題 II.16.15　量化記号を含まない論理式 φ が**連言標準形**であるとは，それが 1 個以上の節（定義 II.14.1 参照）の連言になっていることをいう．量化記号を含まないすべての論理式がある連言標準形と論理的に同値であることを示しなさい．
[ヒント]　ブール値の変数 n 個の（2^n 行からなる）あらゆる真理値表がすべてなんらかの連言標準形から得られることを，直接証明しなさい．　□

演習問題 II.16.16　論理式 φ が**冠頭標準形**であるとは，それが量化記号を含まないある論理式 ψ と，ある $n \geq 0$ と量化記号 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ について

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, \psi$$

の形になっていることをいう．どんな論理式もある冠頭標準形の論理式と論理的に同値であることを証明しなさい．
[ヒント]　φ に関する帰納法．命題演算記号を処理するにあたって，いくつかの束縛変数を書き換えなければならない可能性がある．たとえば $\forall y \, p(x,y) \vee \neg \exists y \, p(x,y)$ は $\forall y \, p(x,y) \vee \forall y \neg p(x,y)$ と同値で，これは冠頭標準形 $\forall y \forall z [p(x,y) \vee \neg p(x,z)]$ と同値である．　□

以上二つの演習問題を合わせれば，量化記号を含まない ψ として，必要ならいつでも連言標準形のものをとることができます．先ほどの例では偶然にもそうなっていました．

冠頭標準形の特別な場合として，どの Q_i も全称量化記号であるような**全称標準形**があります．これの例をあげるため，$\mathcal{L} = \{<\}$ とし Σ を稠密全順序の公理系としましょう．$<$ が全順序であるという公理はもともと全称標準形になっていますが，$<$ が稠密であると主張する追加の公理 δ すなわち $\forall x \forall y \exists z [x < y \to x < z < y]$ には存在量化記号が必要と思われます．実際のところ，演習問題 II.15.5 によれば，稠密全順序の部分構造が稠密とは限らないことから，稠密全順序の公理系を全称標準形で書くことはできないとわかります．ここで言語を拡大して $\mathcal{L}' = \{<, f\}$ とし，δ を次の δ' すなわち $\forall x \forall y [x < y \to x < f(x,y) < y]$ に置き換えることで，全称理論 Σ' が得

られます．この f はスコーレム函数ですが，定理 II.16.6 の証明のときとは違って，スコーレム函数が言語の一部に組込まれているわけです．$\delta' \vdash \delta$ であることがわかります．Σ からは f について何も証明できないので，Σ と Σ' は同値というわけにはいきませんが，Σ のモデルはいつでも（選択公理を使って）Σ' のモデルに拡張できることから，Σ' は Σ の保守的拡大になっています．より一般には，

演習問題 II.16.17　Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とする．次の(1)–(4)をみたす Σ' と $\mathcal{L}'$ が存在する：

（１）ある記号の集合 $\mathcal{C}$ について $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$.

（２）Σ' は $\mathcal{L}'$ の文からなる集合で，Σ に属する文はすべて Σ' から証明できる．

（３）Σ' に属する文はすべて全称標準形である．

（４）Σ' は Σ の保守的拡大である．すなわち φ が $\mathcal{L}$ の文で $\Sigma' \vdash \varphi$ のときは $\Sigma \vdash \varphi$ でもある．

定数記号は函数記号の特別な場合ですので，この演習問題は，証人をつけ加えることによって保守的拡大が得られることを示した演習問題 II.12.23 と縁続きのものです．たとえば語彙 $\mathcal{L} = \{+\}$ においてゼロ元が存在することを述べる式 $\exists z \forall x[z + x = x]$ は，ゼロ元に名前をつけることで全称文 $\forall x[0 + x = x]$ に置き換えることができるわけです．

このセクションのしめくくりに初等拡大についてあと二つ演習問題を出します．

演習問題 II.16.18　$\varphi(x)$ を $\mathcal{L}$ の論理式でその自由変数が x のみであるものとし，$\mathfrak{A}$ を任意の $\mathcal{L}$ 構造とする．このとき集合 $\{a \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[a]\}$ を $\varphi^{\mathfrak{A}}$ と表記しよう．この $\varphi^{\mathfrak{A}}$ が無限集合であったとする．このとき $\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{B}$ が存在して，$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ であり $\varphi^{\mathfrak{B}}$ が $\varphi^{\mathfrak{A}}$ を真に含む．

［ヒント］　これは定理 II.16.7 の証明に似ている．$\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$ とおき eDiag($\mathfrak{A}$) を語彙 $\mathcal{L}_A$ で書かれた $\mathfrak{A}$ の初等ダイアグラムとする．新しい定数記号 c について $\varphi(c)$ と各 $a \in A$ に対する $c \neq c_a$ を公理に追加してみなさい．　□

単に $\mathfrak{A} \precneqq \mathfrak{B}$ というだけでは $\varphi^{\mathfrak{A}} \subsetneq \varphi^{\mathfrak{B}}$ は導かれません．たとえば $\mathcal{L} = \{P\}$ として $P(x)$ を $\varphi(x)$ にしましょう．$\mathfrak{A}$ において $P_{\mathfrak{A}}$ も $A \setminus P_{\mathfrak{A}}$ も無限集合だったとします．$\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{B}$ としなさい．（これだけでは $\varphi^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{B}}$ であることは排除されません．）このとき演習問題 II.16.9 により $\mathfrak{A} \precneqq \mathfrak{B}$ となっています．

無限な構造がすべて真の初等拡大をもつという（定理 II.16.7 と演習問題 II.16.18 にもとづく）事実は，微分積分に応用できます．

演習問題 II.16.19　$\mathcal{L}_0 = \{0, 1, +, \cdot, -, i, <\}$ とし，f と g を 1 変数函数記号，Z を単項述語記号として $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{Z, f, g\}$ とおく．$\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{R}$ を次のように定める：$\mathbb{R}$ を宇宙とし，$\mathcal{L}_0$ の記号は通常の解釈をし，Z を自然数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と解釈し，$f_{\mathfrak{R}}$ はなんらかの微分可能な函数で，その導函数を $g_{\mathfrak{R}}$ とする．$\mathfrak{B}$ をこの $\mathfrak{R}$ の真の初等拡大だとする．$\mathfrak{B}$ の要素 ε が**無限小**であるとは，$\varepsilon \neq 0$ だけれどもすべての正の実数 a について $|\varepsilon| < a$ となることをいう．$\mathfrak{B}$ の要素 b が**無限大**であるとはすべての実数 a について $|b| > |a|$ となることをいう．次のことを証明しなさい：

（1）　$b \in B \setminus \{0\}$ が無限大であることと $1/b$ が無限小であることは同値．

（2）　無限小要素と無限大要素は存在する．

（3）　$r \in \mathbb{R}$ で ε が無限小のとき，$(f_{\mathfrak{B}}(r+\varepsilon) - f_{\mathfrak{B}}(r))/\varepsilon - g_{\mathfrak{B}}(r)$ は無限小またはゼロである．

（4）　無限大でありかつ素数であるような $b \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}$ が存在する．

（5）　$P \subseteq \mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}$ を正の無限大素数全体の集合とするとき，P は $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}$ において上に非有界で，最小要素をもたない．

（6）　双子素数予想が真であることとある $p \in P$ について $p + 2 \in P$ となることとは同値である．

ここで，$\mathfrak{B}{\restriction}\mathcal{L}_0$ が（例 II.8.24 でいう）順序体であることから，$|b|$ のような基本的な代数的構成物は $\mathfrak{B}$ において適切に定義できることに注意．$Z_{\mathfrak{B}}$ の要素 b が素数であるという言葉も意味をなす．すなわち，$b \neq 0, \pm 1$ であって $\neg \exists x, y[\, b = x \cdot y \wedge Z(x) \wedge Z(y) \wedge 1 < |x| < |b|\,]$ をみたす，ということである．

［ヒント］　(2) については次のようにしなさい．正の要素 $b \in B \setminus \mathbb{R}$ を任意にとる．もしも b が無限大であれば (1) により話は済む．そうでなければ，

$\varepsilon := b - \sup\{a \in \mathbb{R} : a < b\}$（上限は $\mathbb{R}$ において求める）とするとこれが無限小になる．□

演習問題 II.16.18 を考慮して補足するなら，$Z(x)$ を $\varphi(x)$ としたここでの特定の例に関するかぎり，$\varphi^{\mathfrak{R}} \subsetneq \varphi^{\mathfrak{B}}$ は単に $\mathfrak{R} \precneqq \mathfrak{B}$ から導かれたわけです．

無限小のインフォーマルな概念はライプニッツにまで遡り，現在でも考えの動機付けには有用です．ε のことを，ゼロではないけれども「いまの話に関係のある」すべての正の量よりも小さい大きさと考えることは可能です．そうするとインフォーマルには $(f(a+\varepsilon) - f(a))/\varepsilon$ は $f'(a)$ に無限に近いということになります．近代的な解析学では，導函数を厳密に定義するにあたって無限小の使用を避けて極限の概念を用います．ところが，1960 年代にエイブラハム・ロビンソンが示したところによると，モデル理論を応用すればこのように無限小を用いて微分積分を厳密に展開できるのです．これについてはストロヤンとルクセンバーグのテキスト [59] を見てください．このトピックは全体として**超準解析**と呼ばれています．

II.17　集合論のモデルにおける定義可能性と絶対性

モデルの理論を集合論と結びつけることがここでの主題です．集合論の言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ を考えます．A を任意の空でない集合とするとき，記号 $\in$ を A 上で通常どおり“要素として属する”という関係と解釈して，A を $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ とみなすことができます．

定義 II.17.1　$\in$**-モデル**とは，語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ に対する構造 $\mathfrak{A}$ で $\in_{\mathfrak{A}} = \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$ であるもののことである．この場合 $\mathfrak{A}$ の代わりに A と表記し，たとえば $A \models \varphi$ のように書く．

ここでは基礎の公理をつねに仮定することにします．そのおかげで補題 II.17.9 以降のモデルに関する議論がいくぶん簡単になります．

わたくしたちがこれから扱う集合 A はたいていの場合 ZFC のモデルにはなりませんが，ZFC の公理のうちの多くをみたすように選ぶことはできます．たとえば A として HF すなわち $R(\omega)$ をとれば，A は ZFC の公

理のうち無限の公理以外のすべてをみたしますし，A として HC すなわち $H(\aleph_1)$ をとれば，A は ZFC の公理のうち冪集合の公理を除くすべてをみたします．これについては演習問題 I.14.21 と I.14.22，それにこの後の補題 II.17.13 と II.17.15 を見なさい．

このセクションの内容は，モデルの理論のさまざまな概念の例示となるばかりでなく，さらに二つの重要な応用があります．

第 1 に，これらのモデルによって独立性証明が得られます．HF において無限の公理が偽であることによってこの公理がそれ以外の ZFC の公理から証明できないことがわかります．HC において冪集合の公理が偽であって $\mathcal{P}(\omega)$ が得られないことからこの公理が集合論の他の公理から証明できないことがわかります．より数学的に意義深い例として，いろいろな A を，ZFC のすべての公理に加えて他のさまざまな数学的命題，たとえば CH, $\neg CH$, $2^{\aleph_0} = \aleph_7$ などのモデルとすることができます．これが [36] や [41] といった集合論のテキストで述べられています．セクション 0.4 で言ったとおり，現代の集合論は ZFC のモデルの研究なのです．

第 2 に，再帰理論においては決定可能な集合という概念が研究されます．そうした集合は自然数を要素とするものであったり，自然数の有限集合，自然数の有限列といったさまざまな有限的対象を要素とするものであったりします．これらの有限的対象はすべて HF に属するものであり，モデル HF における定義可能性を考えることで「決定可能」を厳密に定義できます．このことを第 IV 章に詳しく書いています．さらに，実行時間の長さが超限にわたる「アルゴリズム」を考える一般化された再帰理論もあります．たとえば可算無限の実行時間は HC 上の再帰理論に対応します．本書ではこうした一般化された再帰理論には（113 ページのように）ときたま言及する以外にはほとんど触れられませんので，詳しいことはバーワイズのテキスト [4] を見るとよいでしょう．

集合論のモデルについて論じるにあたっては，モデル $\mathfrak{A}$ 自身において定義される**内的**な概念と，全宇宙 V において定義される**外的**な概念とを，きちんと区別せねばなりません．代数学に関しては，誰でもこのことをわきまえています．体におけるゼロ元 0 と実際の集合論の 0 すなわち空集合 $\emptyset$ はまったく無関係です．ところが $\in$-モデル A を考えるときには混乱しがちで

す．これは A がいくぶん V に似ているように見えることが原因でしょう．とりわけ，A が ZFC の公理のうち多くをみたす場合にはそうです．

たとえば語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ のもとでモデル A が空集合 $\emptyset$ の存在を証明できる程度の集合論の公理をみたしていたとしましょう．すると，セクション I.6 で行った議論が A の中で再現できることになります．なんらの仮定なしに，$\mathrm{emp}(x)$ を $\forall z(z \notin x)$ と定めることができ，A が外延性の公理と内包公理をみたす限り $A \vDash \exists! x\, \mathrm{emp}(x)$ となるので，$\emptyset^A$ とは $A \vDash \mathrm{emp}[a]$ となるような唯一の $a \in A$ のことだと定義できます．ところが，次の演習問題にみるとおり，この $\emptyset^A$ が本物の $\emptyset$ と同じ対象であるとは限らないのです．

演習問題 II.17.2　γ を任意の極限順序数とする．$R(\gamma)$ から $R(\gamma)$ の中への同型写像 f で $f(0) = 7$ をみたすものが存在することを証明しなさい．モデル A として $\mathrm{ran}(f)$ を選んだとき $\emptyset^A$ が 7 となることを示しなさい．
［ヒント］　まず $f(0) = 7$ とおき，$0 < \mathrm{rank}(x) < \gamma$ である x についてはランクに関する再帰で $f(x) = \{ f(y) : y \in x \}$ としなさい．　□

このことは，推移的モデルにおいては起こりません．

定義 II.17.3　**推移的モデル**とは A が推移的集合である場合の $\in$-モデル A のことである．

もしも A が $\in$-モデルで a が $A \vDash \mathrm{emp}[a]$ をみたす A の要素だとすると，a の要素が A に属することはないので $a \cap A = \emptyset$ となります．もしもそのうえ A が推移的であったとすれば，$a \subseteq A$ なので $a = \emptyset$ となるわけです．この議論は Δ_0 論理式で定義された任意の性質に一般化できます．論理式 φ が Δ_0 であるというのは，粗く言えば，すべての量化が**有界**である，すなわち $\forall x \in y$ とか $\exists x \in y$ というパターンで出現するということです．とくに量化記号を含まない論理式はすべて Δ_0 であり，このあとの例 II.17.5 で見るとおり，簡単な集合論的性質を表現する論理式のいくつかも Δ_0 です．

定義 II.17.4　語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ で考える．したがって項は変数のみであり原子論理式は $x \in y$ あるいは $x = y$ の形である．このとき $\mathcal{L}$ の Δ_0 **論理式**とは以下の規則で構成される論理式のことである．

（a）　原子論理式はすべて Δ_0 論理式である．

（b） φ が Δ_0 論理式で $x, y \in VAR$ であるとき，$\forall x \in y\, \varphi$ と $\exists x \in y\, \varphi$ とは Δ_0 論理式である．

（c） φ が Δ_0 論理式ならば $\neg\varphi$ もそうである．

（d） φ と ψ が Δ_0 論理式ならば $\varphi \vee \psi$ も $\varphi \wedge \psi$ も $\varphi \to \psi$ も $\varphi \leftrightarrow \psi$ もそうである．

ここでは，最初に構文を定義したII.5.3とは違い，ポーランド記法の代わりに慣用の記法を用いています．そして，$\forall x \in y\, \varphi$ とは $\forall x\, [x \in y \to \varphi]$ の略記であり $\exists x \in y\, \varphi$ とは $\exists x\, [x \in y \wedge \varphi]$ の略記です．$\mathrm{emp}(x)$ を $\forall z(z \notin x)$ とするなら，これは実際には Δ_0 ではありませんが，$\forall z \in x\, [z \neq z]$ という Δ_0 論理式と論理的に同値になっています．このあとすぐに，補題II.17.6において，Δ_0 論理式はすべての推移的モデルにおいて同じ意味をもつという意味で**絶対的**であることを確かめます．とくに，A が推移的であるとき，$A \vDash \mathrm{emp}[\emptyset^A]$ から $\mathrm{emp}(\emptyset^A)$ が実際に V において真であることになり，$\emptyset^A$ は本物の $\emptyset$ に一致します．

例 II.17.5　次に掲げる論理式はいずれも Δ_0 論理式である．リストには各論理式が言わんとしていることを添え書きする．

（1） $\forall z \in x(z \neq z)$:　x は空集合である．（定義I.6.1の $\mathrm{emp}(x)$.）

（2） $\forall z \in x(z \in y)$:　$x \subseteq y$.

（3） $\forall y \in x(\forall z \in y(z \in x))$:　x は推移的集合である（定義I.8.1参照）．

（4） $\exists y \in x \forall z \in x(z = y)$:　x は単元集合である，$\mathrm{SING}(x)$（セクションI.2参照）．

（5） $x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z(u = x \wedge u = y)$:　$\{x, y\} = z$. これを $\mathrm{up}(x, y, z)$ と書く．

（6） $\exists v \in z \exists w \in z[\mathrm{up}(v, w, z) \wedge \mathrm{up}(x, x, v) \wedge \mathrm{up}(x, y, w)]$:　$\langle x, y \rangle = z$. これを $\mathrm{op}(x, y, z)$ と書く．

ここにリストしたのは第I章で議論した簡単な集合論的性質のいくつかですが，そのときはこれらの論理式の V における真偽を論じている，と解されたわけです．しかしながら，これらは Δ_0 論理式で表現されているので，どんな推移的集合 A においても同じ意味をもつことになります．一般に次のことが成立します．

補題 II.17.6　$A \subseteq B$ で A が推移的集合のとき，集合論の言語におけるすべての Δ_0 論理式 φ について $A \preccurlyeq_\varphi B$ である．

【証明】　ここで $\preccurlyeq_\varphi$ という記法は定義 II.16.1 のものであり，また記号 $\in$ を普通どおり，要素として属するという関係と解釈している．$A \preccurlyeq_\varphi B$ を φ に関する帰納法で証明しよう．基礎となる，量化記号を含まない論理式の場合はたやすい．また，命題演算子に関する帰納のステップは読者の演習とする．

量化記号 $\exists$ に関する帰納のステップを見るため $\varphi(\vec{x}, z)$ が $\exists y \in z\ \psi(\vec{x}, y, z)$ で，ψ が Δ_0 論理式で，帰納法の仮定として $A \preccurlyeq_\psi B$ が成立しているとする．このとき A の要素の任意の組 $\vec{a}$ と任意の要素 $c \in A$ について

$$
\begin{aligned}
A \vDash \varphi[\vec{a}, c] &\iff \exists b \in A \bigl\{ A \vDash (y \in z \wedge \psi)[\vec{a}, b, c] \bigr\} \\
&\iff \exists b \in B \bigl\{ B \vDash (y \in z \wedge \psi)[\vec{a}, b, c] \bigr\} \iff B \vDash \varphi[\vec{a}, c]
\end{aligned}
$$

となる．一つ目と三つ目の $\Leftrightarrow$ は $\vDash$ の定義と $\exists y \in z$ という略記の意味合い，それから A と B が $\in$-モデルであるという事実による．ここで，要素の並び $[\vec{a}, b, c]$ は変数 $\vec{x}, y, z$ のそれぞれに対応していると解している．第 2 の $\Leftrightarrow$ は $A \preccurlyeq_\psi B$ であることと A が推移的なので $c \in A$ から $c \subseteq A \subseteq B$ が言えて $b \in c \to b \in A, B$ となることを用いる．すなわち，$\exists b \in A$ も $\exists b \in B$ も，どちらも $\exists b$ に置き換えられる．

量化記号 $\forall$ に関する帰納のステップも同様であるから，読者の演習とする．□

集合 A と B についての命題と考えれば，補題 II.17.6 は ZF で証明できる一つの定理の略記となっています．B が真のクラスである場合には，補題 II.17.6 はメタ理論における一つの図式を略記するものです．真のクラスをモデルとすることに関して詳しくは次のセクション II.18（とくにパラドックス II.18.13 と演習問題 II.18.14）を見なさい．

とくに B として V をとることもできます．例 II.17.5 で言えば，$a, b, c \in A$ であって $A \vDash \mathrm{op}[a, b, c]$ であるときには本当に $\langle a, b \rangle = c$ となっているのです．これはすべての推移的集合 A について成立するのですが，だからといって $a, b \in A$ のときにいつでも $\langle a, b \rangle \in A$ である，というわけにはいきません．つまり $\forall x, y \exists z\ \mathrm{op}(x, y, z)$ という命題が A において偽でありうるということです．たとえば $A = \omega$ のときには偽で，$A = H(\kappa)$ のときは任

意の無限基数 κ について真，$A = R(\gamma)$ のときも任意の極限順序数 γ について真となります．

集合論の文献においては $A \preccurlyeq_\varphi B$ という概念は**絶対性**という言葉で表現されることが多いです．

定義 II.17.7 φ が A, B **に対して絶対的である**とは，$A \preccurlyeq_\varphi B$ ということ．φ が A に対して絶対的であるとは $A \preccurlyeq_\varphi V$ であることをいう．

そこで，補題 II.17.6 から，Δ_0 論理式で記述される性質は A が推移的である限り A に対して絶対的であることがわかります．文献 [36] や [41] にあるような集合論における独立性証明では，ZFC と他のいろいろな命題，CH とか $\neg CH$ とか $2^{\aleph_0} = \aleph_7$ とかのモデルとなるような推移的集合を構成します．そのさいに，Δ_0 論理式で定義されるような簡単な集合論的性質がすべての推移的モデルで絶対的な意味をもつことを補題 II.17.6 が示してくれるので，わたくしたちはモデルごとに真偽が変わってくるもっと複雑な数学的命題の意味に焦点を合わせることができるようになります．ここに補題 II.17.6 の重要性があるのです．たとえば $x \subseteq \omega$ という概念は（補題 II.17.9 で見るとおり）Δ_0 です．$A \vDash CH$ か否かという問題は，ω の部分集合がどれくらい多く A に属するかによるのですが，このことの分析にあたって，わたくしたちは少なくとも ω の部分集合**である**ということ自体は A と V で同じ意味をもつと知ったわけです．

さまざまな性質が Δ_0 であることをチェックするにあたって，実際の Δ_0 論理式を明示するのはだんだんと面倒になってきますので，Δ_0 がどのような操作のもとで閉じているかを知ることが有用です．有界な量化や命題演算子による結合のもとで Δ_0 が閉じていることは定義から明らかで，このことはすでに例 II.17.5 でも利用しています．このほかに，$\bigcup^k y$ 上での量化（定義 I.9.5 を参照）も，実質的には有界な量化です．

補題 II.17.8 有限な k を固定するとき，φ が Δ_0 論理式であれば，$\forall x \in \bigcup^k y\, \varphi$ と $\exists x \in \bigcup^k y\, \varphi$ は Δ_0 論理式（と同値）である．

【証明】 たとえば $\forall x \in \bigcup^3 y\, \varphi$ は $\forall z_1 \in y \forall z_2 \in z_1 \forall z_3 \in z_2 \forall x \in z_3\, \varphi$ と同値である．□

たとえば “x は順序対である” を素直に表現すれば $\exists u, v\ \mathrm{op}(u, v, x)$ となりますが，$\langle u, v\rangle = \{\{u\}\{u, v\}\} = x$ であれば $u, v \in \bigcup x$ ですから，$\exists u, v\ \mathrm{op}(u, v, x)$ は $\forall u, v \in \bigcup^1 x\ \mathrm{op}(u, v, x)$ とも同値であって，Δ_0 なのです．次に，“x は関係である” は $\forall p \in x[p$ は順序対である$]$ であり，関係 x が函数であることは

$$\forall p, q \in x\, \forall a, b, c \in \bigcup^2 x\, [\,\mathrm{op}(a, b, p) \wedge \mathrm{op}(a, c, q) \to b = c\,]$$

と書けます．例 II.17.5 の続きを述べる次の補題では，Δ_0 であるような簡単な集合論的概念のリストを示しています．したがって，それらは絶対的であるわけです．

補題 II.17.9（ZF）　以下に掲げる集合論的概念はいずれも Δ_0 論理式で表現できる．

（7）　x は順序数である．

（8）　x は極限順序数である．

（9）　x は後続順序数である．

（10）　x は自然数である．

（11）　$x \subseteq \omega$.

（12）　$x = \omega$.

（13）　$z = \bigcup y$.

（14）　x は順序対である．

（15）　x は関係である．

（16）　x は函数である．

（17）　$y = \mathrm{dom}(x)$.

（18）　$y = \mathrm{ran}(x)$.

（19）　x は $\mathrm{dom}(x)$ から $\mathrm{ran}(x)$ の上への全単射である．

（20）　$y = S(x)$，ただし $S(x) = x \cup \{x\}$ とする．

（21）　$z = x \times y$.

（22）　x は函数であり，$y \in \mathrm{dom}(x)$ であり，$x(y) = z$ である．

【証明】　(7) について．推移的であることは（例 II.17.5 により）Δ_0 である．x が $\in$ によって全順序づけされていることは x 上の量化でたやすく表現できる．x が順序数であるためには，さらに $\in$ によって整列順序づけされて

いることが求められるが，基礎の公理を含む ZF で考えている限り，このことは自動的に成立する．すなわち，Q を x の空でない部分集合とするとき，$t \in Q$ かつ $t \cap Q = \emptyset$ となる要素 t があり，この t は Q の $\in$-極小要素である．

(8)–(12) は (7) ができれば簡単だ．たとえば x が後続順序数であるためには x が順序数であってそのうえ $\exists y \in x \forall z \in x[z = y \vee z \in y]$ となることが必要十分である．また x が自然数であるためには，x 自身と x のすべての要素が後続順序数または $\emptyset$ であることが必要十分である．

(13)–(22) は補題 II.17.8 を用いてたやすく示される．(14) と (15) と (16) をつい先ほど済ませたばかりだし，その他も同様だ．□

この補題にさらに $x = 7$ とか $x = \{\{3\}\}$ が $\varDelta_0$ 論理式で表現できるという事実を付け加えることもできたでしょう．一般にこのことは HF のあらゆる要素について成立します．

定義 II.17.10　HF の各要素 b に対して $\varDelta_0$ 論理式 $\delta_b(z)$ を再帰的に

$$\forall x \in z \bigvee_{a \in b} \delta_a(x) \wedge \bigwedge_{a \in b} \exists x \in z\, \delta_a(x)$$

によって定める．

とくに空な $\bigvee$ は偽（たとえば $x \neq x$）と解釈し，空な $\bigwedge$ は真と解釈するのです．ですから $\delta_\emptyset(z)$ は $\forall x(x \notin z)$ と論理的に同値で，$\emptyset$ についてだけ真となります．$\delta_b(z)$ のことを

$$\forall x \bigl[\, x \in z \leftrightarrow \bigvee_{a \in b} \delta_a(x) \,\bigr]$$

と書いたほうがエレガントではあったでしょうが，もう一つの長い論理式のほうは $\varDelta_0$ になっています．次の補題により両者は同値です．この補題は b に関する帰納法でたやすく示せます．

補題 II.17.11　HF の任意の要素 b について $\forall z[\delta_b(z) \leftrightarrow z = b]$ である．

定義された関係や函数のモデルにおける意味を論じるさいに役に立つ記法を導入しましょう．

定義 II.17.12　$\in$-モデル A について，$\varphi^A(a_1, \cdots, a_n)$ とは $A \vDash \varphi[a_1, \cdots, a_n]$

の略記だとする．また F をサブセクション I.7.2 の意味における定義された函数あるいは定数とするとき，A の中で計算されたその函数を F^A と書く．

関係について．$a, b \in A$ のとき，「論理式 $\forall z \in x(z \in y)$ を $\varphi(x, y)$ とするとき $A \vDash \varphi[a, b]$」という長い表現の代わりに「$a \subseteq^A b$」と書けます．そこで絶対性により A が推移的である場合 $a \subseteq^A b$ と $a \subseteq b$ は同値となります．一般の場合 $a \subseteq^A b$ は $a \cap A \subseteq b$ と同値です．CH^A は $A \vDash CH$ の別表現です．CH は，ある推移的モデルでは真であり他のある推移的モデルでは偽になりますので，絶対的ではありません．絶対的でないもっと単純な概念の例として濃度の概念があります．定義 I.11.1 によれば $a \approx b$ というのは $\exists f[f\colon a \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} b]$ ということでした．補題 II.17.9 によって，この $\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}$ の部分はすべての推移的モデルに対して絶対的ですが，$\approx$ は違います．$|a| = |b|$ が成立していたとしても，$f\colon a \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} b$ なる f が 1 個も A に属しないこともあります．くだらない例ですが，$a = \omega$，$b = \omega + 1$，$A = \omega + \omega$ としてみましょう．A は推移的集合ですが，あまり多くの函数を含みません．もう少しマシな例としては，文献 [36] や [41]，あるいは本書の演習問題 IV.3.31 を見なさい．

定義された函数（定数も含めて）について．上付き添字をつけた $\emptyset^A$ という表記はすでに用いました．これと同様に $a, b \in A$ のとき $a \times^A b$ は A の中で求めた a と b のデカルト積をあらわしています．この表記を用いるさいには注意が必要です．$\Pi(x, y, z)$ を $z = x \times y$ を意味する Δ_0 論理式（補題 II.17.9 参照）としましょう．記号 $\times^A$ は $A \vDash \forall x, y \exists! z \Pi(x, y, z)$ であるときに限って意味をなし，この z が $x \times^A y$ となります．もしもさらに A が推移的集合であるなら，論理式 Π の絶対性により $x \times^A y = x \times y$ になります．

一般に，補題 II.17.9 をはじめとする結果を絶対性の証明に応用するにあたっては少々注意深くせねばなりません．どんな問題がありうるか一例を挙げるため，項目 (10) について考えましょう．集合論を学ぶ人々は皆，自然数とは何かということについての見解は一致しますが，その見解をどんな論理式で表現するかは人によって違うかもしれません．ある人は論理式 $\varphi_1(x)$ として x はすべての極限順序数の要素である，という意味の $\forall y[lim(y) \to x \in y]$ を書くでしょうし，他の人は定義 I.8.12 に従い，論理式 $\varphi_2(x)$ とし

て x およびそのすべての要素は 0 であるか後続順序数である，という意味の式を書くでしょう．たいていの場合両者の違いが問題にならないのは，φ_1 と φ_2 が同値であることが ZF で証明できるからです．ですから ZF の展開を論じているときや ZF のモデルを調べているときなどは，φ_1 と φ_2 を同じように用いてよいのです．ところが HF のような ZF の部分理論のモデルを調べているときには，ここに潜在的な問題があります．Δ_0 論理式 $\varphi_3(x)$ へと自然に翻訳できるのは $\varphi_2(x)$ のほうです．φ_3 はすべての推移的モデルに対して絶対的です．$\forall x[\varphi_2(x) \leftrightarrow \varphi_3(x)]$ の証明には無限の公理を必要としないので，「自然数」が HF に関して絶対的だと言ったときには，おそらく採用されているのは φ_2 のような定義のはずです．φ_1 は実は HF に対して絶対的ではありません．HF には極限順序数というものが存在しないので，$HF \vDash \forall x \varphi_1(x)$ となってしまうのです．

ここまでの Δ_0 や絶対性についての知識をもって演習問題 I.14.21 や I.14.22 を見直してみましょう．次の二つの補題ではこれら演習問題のうち絶対性に関連する部分を証明しています．

補題 II.17.13　任意の極限順序数 $\gamma > \omega$ に対して $R(\gamma)$ は ZC 集合論のモデルであり，$\omega < \gamma < \omega_1$ をみたす極限順序数 γ については置換公理の特定の実例が $R(\gamma)$ において偽になっている．

【証明】　たいていの公理についてはあえて読者の演習として残すが，定義された概念を使用する公理 7 と 8 と 9 についてコメントしよう．$A = R(\gamma)$ とする．

公理 8（冪集合の公理）が A で成立していることを検証するには

$$\forall x \in A \exists y \in A \forall z \in A \big[\, z \subseteq^A x \to z \in y \,\big]$$

であることを確かめなければならない．A が推移的なので $\subseteq^A$ は $\subseteq$ に置き換えられる．そこでこの公理が $A = R(\gamma)$ で真になる．というのも，（補題 I.14.8 によって）$\mathrm{rank}(\mathcal{P}(x)) = \mathrm{rank}(x) + 1$ であり γ が極限順序数であることから $y = \mathcal{P}(x)$ とおけば y は A に属するからである．

公理 7（無限の公理）については

$$\exists x \in A \big(\emptyset^A \in x \land \forall y \in x (S^A(y) \in x)\big)$$

であることを確かめなければならない．ここで γ が極限順序数であること

により（論理式 “$z = S(y)$” は絶対的であり $\forall y \in A[S(y) \in A]$ であるから）$\emptyset^A$ を $\emptyset$ に，S^A を S に，それぞれ置き換えて差し支えない．いま $\gamma > \omega$ より ω は A に属し，$x = \omega$ とおけばこの公理は A において真となる．

公理 9（選択公理）について，AC を $\forall F \exists C[\mathrm{df}(F) \to \mathrm{cs}(C, F)]$ と表現することができるだろう．ここで $\mathrm{df}(F)$ とは F が互いに交わりのない空でない集合からなる族であると主張し，$\mathrm{cs}(C, F)$ は C が集合族 F の選択集合であると主張するものとする．補題 II.17.9 の方法で，df も cs も Δ_0 論理式で表現でき絶対的であることがわかるので，推移的モデル A において AC が成立するためには $\forall F \in A \exists C \in A[\mathrm{df}(F) \to \mathrm{cs}(C, F)]$ でありさえすればよい．このことは $A = R(\gamma)$ の場合には成立している．というのも C が F の選択集合であるときは必ず $\mathrm{rank}(C) \leq \mathrm{rank}(F)$ となるからである．もちろんここでは通常どおり ZFC で議論していて，集合族 F の選択集合が本当に存在するという事実を利用している．議論せねばならないのは，指定された特定のモデルの中に選択集合が存在するかどうか，だけである．

いっぽう，内包公理の検証にあたっては絶対性を**用いない**ことにも注意しておこう．内包公理は手短に言えばどんな論理式 φ についても $\{x \in z : \varphi(x)\}$ が存在すると主張する．このことが推移的な A で真であることを検証するには，$z \in A$ のときに必ず $y := \{x \in z : \varphi^A(x)\}$ が A に属することを確かめなければならない．ここでは φ^A が φ と同値であるとは**主張していない**．単に，$y \subseteq z$ だから $\mathrm{rank}(y) \leq \mathrm{rank}(z)$ であり，$A = R(\gamma)$ なら $z \in A \to y \in A$ となる，というだけである．

さて，$\omega < \gamma < \omega_1$ と仮定しよう．置換公理（のある実例）が $A = R(\gamma)$ において不成立であることを見るために，もしも A が置換公理をみたすなら $A \vDash ZFC$ となることに注意しよう．ω を順序型 γ で順序づけする整列順序 W をとる．$\mathrm{rank}(W) = \omega$ なので $W \in A$ である．すべての整列順序が順序数と同型になるという ZFC の定理と絶対性の議論により，$\mathrm{type}(W) \in A$ ということになるが，$\gamma \notin R(\gamma)$ なのでこれは矛盾である．□

実際のところ $R(\gamma) \vDash ZFC$ となるような順序数 γ はかなり大きなものになるはずです．

演習問題 II.17.14　$R(\gamma) \vDash ZFC$ と仮定する．γ は基数であって，$\gamma = \beth_\gamma$

であり，$\{\alpha < \gamma : \alpha = \beth_\alpha\}$ が順序型 γ をもつことを示しなさい．

ZFC において $\gamma = \beth_\gamma$ をみたす基数 γ を作ること（演習問題 I.13.18）はできるのですが，$R(\gamma) \vDash ZFC$ となるような γ の存在は（ZFC が無矛盾であると仮定する限り）次の理由により，証明できません．

仮に $ZFC \vdash \exists\gamma[R(\gamma) \vDash ZFC]$ だったとすると $ZFC \vdash \mathrm{Con}(ZFC)$ となってしまい，ゲーデルの第二不完全性定理（IV.5.32）と矛盾することになります．もっと初等的に矛盾を出すには，ZFC で議論して $R(\gamma) \vDash ZFC$ となる最小の γ をとりましょう．すると仮定により $R(\gamma) \vDash \exists\delta[R(\delta) \vDash ZFC]$ となります．そのような δ は $R(\gamma)$ に属するので γ 未満であり，γ の最小性に矛盾します．ただし，このときもちろん，“$R(\delta) \vDash ZFC$” という主張の絶対性を検証せねばなりません．

補題 II.17.15　正則基数 $\kappa > \omega$ に対して，$H(\kappa)$ は ZFC の公理のうち冪集合の公理を除くすべての公理のモデルである．$H(\kappa)$ で冪集合の公理が成立することと κ が強到達不能基数であることとは同値である．また，HF すなわち $H(\omega)$ すなわち $R(\omega)$ は，無限の公理を除く ZFC のすべての公理のモデルである．無限の公理は HF では成立しない．

【証明】　補題 II.17.13 のときと同様，絶対性が問題になる公理 7 と 8 と 9 に注目する．内包公理と置換公理の検証においては絶対性は必要とされないことに注意しよう．$A = H(\kappa)$ とおく．

公理 7 と公理 9 についての議論は，$\kappa > \omega$ の場合，ほぼ完全に $R(\gamma)$ に対する議論と同じである．$\omega \in A$ であることと，集合族 $F \in H(\kappa)$ のどんな選択集合もまた $H(\kappa)$ に属することを用いればよい．$\kappa = \omega$ のときも AC については同じ議論が通用するが，無限の公理は成立しない．HF には，$\emptyset$ を含み S のもとで閉じた集合は存在しえない．そのような集合が無限集合になってしまうからだ．

冪集合の公理について考えてみよう．$z \subseteq x \in H(\kappa)$ であれば，$\mathrm{trcl}(z) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ なので $z \in H(\kappa)$ となることに注意する．$\subseteq$ は絶対的なので，$A = H(\kappa)$ のときに冪集合の公理が A であることは $\forall x \in A \exists y \in A \forall z[z \subseteq x \to z \in y]$ と同値であり，これはまた $\forall x \in A \exists y \in A[\mathcal{P}(x) \subseteq y]$ とも同値である．内包公理が A で真であることから，これらはさらに $\forall x \in A[\mathcal{P}(x) \in$

$A]$ と同値になっている．$H(\kappa)$ の定義により，このことは $\forall\lambda < \kappa[2^\lambda < \kappa]$ であるとき，かつそのときに限り真であるが，κ が正則基数である場合，このことは $\kappa = \omega$ のときあるいは κ が強到達不能基数であるとき，かつそのときに限り真である．□

ところで HF は有限数学のモデルと考えられますから，次のことも確かめておかねばなりません．

演習問題 II.17.16　HF は，「どんな集合 x も，ある自然数の上への全単射をもつ」という命題のモデルである．
［ヒント］ 補題 II.17.9 で得られた絶対性の結果を用いれば容易である．□

ここまでの議論では，ある公理は真であるが他のある公理は偽であるようなモデルを与えるという，独立性の結果に注力してきました．再帰理論への応用のためには，これに代わって**定義可能性**に注目し，A 上のどんな関係が A においていろいろな論理式を用いて定義できるかを考えます．

シンタクス的な "Δ_0 論理式" の概念に対応するセマンティクス的な概念として集合 A 上の "Δ_0 関係" があります．これは A 上で Δ_0 論理式によって定義される関係ということです．関係の定義に A の要素をパラメータとして認めるかどうかによって，Δ_0 関係という概念も 2 とおりに定義できます．パラメータを許した場合をあらわすために太文字 $\boldsymbol{\Delta}_0$ を用いるのが慣例になっています．

定義 II.17.17　A を空でない集合とし $R \subseteq A^n$ とする．

☞ R が A 上 Δ_0 であるとは，なんらかの Δ_0 論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ によって $R = \{\, \vec{a} \in A^n : A \vDash \varphi[\vec{a}] \,\}$ となることである．

☞ R が A 上 $\boldsymbol{\Delta}_0$ であるとは，なんらかの Δ_0 論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ となんらかの固定された $b_1, \cdots, b_m \in A$ によって $R = \{\, \vec{a} \in A^n : A \vDash \varphi[\vec{a}, \vec{b}] \,\}$ となることである．

明らかに，Δ_0 関係は $\boldsymbol{\Delta}_0$ でもあります．A が不可算のときにはこの逆は成り立ちません．Δ_0 関係が高々可算個しかないのに，A の各要素 b に対して $\{b\}$ が（$m = n = 1$ で $\varphi(x, y)$ として $x = y$ をとれば）$\boldsymbol{\Delta}_0$ 集合（単項関係）になるからです．A 上で $\Delta_0 \subsetneq \boldsymbol{\Delta}_0$ となるような，可算な推移的集合 A も

あります（演習問題 II.17.30 参照）．しかしながら，

補題 II.17.18　HF 上の $\boldsymbol{\Delta}_0$ 関係はいずれも Δ_0 である．

【証明】　$b \in HF$ のとき，論理式 $z = b$, $b \in z$, $z \in b$ はそれぞれ Δ_0 論理式 $\delta_b(z)$, $\exists y \in z \delta_b(y)$, $\bigvee_{a \in b} \delta_a(z)$（定義 II.17.10 参照）に書き換えることができる．　□

補題 II.17.19　$E := \{2n : n \in \omega\}$ は HF の Δ_0 部分集合ではない．

【証明】　補題 II.17.6 によれば E が ω の Δ_0 部分集合でないことを示せば十分である．その ω 上では，要素として属するという関係は通常の大小関係と一致し，演習問題 II.16.8 によれば，E はモデル $(\omega; <)$ すなわち $(\omega; \in)$ においてそもそも定義可能でない．　□

インフォーマルに言って，HF 上の Δ_0 関係はいずれも**決定可能**です．Δ_0 論理式が与えられれば，HF の要素の組 $\vec{a}$ を**入力**とし，φ が HF 上で $\vec{a}$ について真か偽かを**出力**するコンピュータのプログラムを，たやすく書くことができます．有界な量化は有界な探索に対応しています．

実際にわたくしたちは決定可能性についての議論を HF 上の Δ_0 の概念から始めますが，補題 II.17.19 は，Δ_0 の範囲を超えてより適切な「決定可能」の定義を見つける必要があることを示しています．というのも，E という集合は確かに決定可能だからです．第 IV 章で見るとおり，決定可能に対する正しい概念は，次に定義する Δ_1 です．

定義 II.17.20　論理式 φ が Σ_1 であるとはある $k \geq 0$ と Δ_0 論理式 ψ について φ が $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \psi$ の形をしていることをいう．論理式 φ が Π_1 であるとはある $k \geq 0$ と Δ_0 論理式 ψ について φ が $\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k \psi$ の形をしていることをいう．

ここで k は 0 でもよいので，すべての Δ_0 論理式は Σ_1 であると同時に Π_1 でもあります．

定義 II.17.21　A を任意の空でない集合とし，$R \subseteq A^n$ とする．R が A 上で Σ_1 である，A 上で $\boldsymbol{\Sigma}_1$ である，A 上で Π_1 である，A 上で $\boldsymbol{\Pi}_1$ である，といったことは，定義 II.17.17 とまったく同様に，ただし今度は φ が

Σ_1 論理式あるいは Π_1 論理式であるとして，定義される．

さらに，R が A 上で Δ_1 であるとは R が A 上で Σ_1 であると同時に Π_1 でもあることであるとし，R が A 上で $\boldsymbol{\Delta}_1$ であるとは R が A 上で $\boldsymbol{\Sigma}_1$ であると同時に $\boldsymbol{\Pi}_1$ でもあることだとする．

ここでも，太文字バージョンの $\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Delta}_1$ では A の要素をパラメータとして用いてよいとしています．補題 II.17.18 とまったく同様にして次の補題が得られます．

補題 II.17.22　HF 上では $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \Sigma_1$ であり，$\boldsymbol{\Pi}_1 = \Pi_1$ であり，$\boldsymbol{\Delta}_1 = \Delta_1$ である．

ここで「Δ_1 論理式」などという概念はないことに注意しておきましょう．R が A 上で Δ_1 であるというのは，R がある Σ_1 論理式で定義でき，またある Π_1 論理式でも定義できる，という意味ですが，このとき両方の論理式がなんらかの意味で関連していることは求めていません．とはいえ，次の例では両者は関連しあっています．

演習問題 II.17.23　$E := \{2n : n \in \omega\}$ は HF 上で Δ_1 である．
[ヒント]　$\theta(x, e)$ を，x が自然数であり，$e \subseteq x$ であって，e はちょうど x 未満の偶数のすべてからなると主張する Δ_0 論理式だとする．とすると，$x \in \omega$ のとき，x が奇数であることは $\exists e[\theta(x, e) \wedge \exists u \in e[x = S(u)]]$ と同値であり，x が偶数であることは $x = 0 \vee \exists e[\theta(x, e) \wedge \exists u \in e[x = S(S(u))]]$ と同値である．　□

ヒントに述べた二つの式は，量化の範囲が HF であると考えても V であると考えても，正しく奇数の全体と偶数の全体とを定義することを確認してください．これらの式の量化の範囲が ω であると考えると，集合 e が ω の要素でないために，結果が正しくなくなります．そこで，Δ_1 の絶対性を主張する補題 II.17.6 の変形版をこの後の補題 II.17.25 で主張するにさいしても，わたくしたちは少しばかり注意深くしなければなりません．その理由は，まず第 1 に，A と B についてより多くの仮定を置かねばならないこと，第 2 に，「Δ_1 論理式」なる概念が存在しないことです．

補題 II.17.24　$A \subseteq B$ で，A も B も推移的であるとする．$\psi(\vec{x})$ が Σ_1 論理式なら $\forall \vec{x} \in A[\psi^A(\vec{x}) \to \psi^B(\vec{x})]$ である．$\psi(\vec{x})$ が Π_1 論理式なら $\forall \vec{x} \in A[\psi^B(\vec{x}) \to \psi^A(\vec{x})]$ である．

【証明】　Σ_1 の場合．$\varphi(\vec{x},\vec{y})$ を Δ_0 論理式として $\psi(\vec{x})$ が $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \varphi(\vec{x},\vec{y})$ だとしよう．$\varphi^A(\vec{x})$ ならば，A の要素の組 $\vec{y}$ が存在して $\varphi^A(\vec{x},\vec{y})$ となり，したがって $\varphi^B(\vec{x},\vec{y})$ となって，$\psi^B(\vec{x})$ が言える．

残る Π_1 の場合も議論は同様である．□

補題 II.17.25　$A \subseteq B$ で，A も B も推移的であるとする．$\varphi(\vec{x})$ は集合論の論理式であるとし，Σ_1 論理式 $\psi_\Sigma(\vec{x})$ と Π_1 論理式 $\psi_\Pi(\vec{x})$ とが存在して

$$\forall \vec{x}[\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi_\Sigma(\vec{x})] \wedge \forall \vec{x}[\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi_\Pi(\vec{x})] \tag{❀}$$

という文が A においても B においても真であると仮定する．このとき $A \preccurlyeq_\varphi B$ である．

【証明】　A の要素の組 $\vec{x}$ を固定する．φ が ψ_Σ と同値であることを利用して $\varphi^A(\vec{x}) \to \varphi^B(\vec{x})$ を示し，φ が ψ_Π と同値であることを利用して $\varphi^B(\vec{x}) \to \varphi^A(\vec{x})$ を示しなさい．□

実際上は，(❀) を検証するさいにはそれが集合論のいくつかの公理から証明されるということを示すことになります．たとえば $\varphi(x)$ が「x は自然数で，偶数である」ということを定義する通常の論理式であったとして，ψ_Σ と ψ_Π を演習問題 II.17.23 に示されたようにとったとしましょう．このとき，(❀) は外延性の公理，基礎の公理，内包公理，対の公理，和集合の公理から証明できますので，$\varphi(x)$ はこれらの公理のすべての推移的モデルにおいて同じ意味をもつことになります．そうしたモデルの例としてはすべての極限順序数 γ についての $R(\gamma)$ とすべての無限基数 κ についての $H(\kappa)$ があります．

もう少し Δ_0 と Σ_1 と Π_1 と Δ_1 について詳しく述べておきます．同様の注意がパラメータを許した $\boldsymbol{\Delta}_0$ と $\boldsymbol{\Sigma}_1$ と $\boldsymbol{\Pi}_1$ と $\boldsymbol{\Delta}_1$ についても成立します．HF 上でのこれらの特質については，第 IV 章で詳しく扱います．

次のことは定義から明らかです．

補題 II.17.26　どんな A についても，A 上の Δ_0 関係は Δ_1 であり，Δ_1

関係は Σ_1 であり Π_1 でもある.

まったく任意の A についてはこれ以上のことはあまり言えません. たとえば $(\omega; <)$ すなわち $(\omega; \in)$ においては, 論理式で定義可能な部分集合は有限または補有限の集合だけで, それらは Δ_0 です. ですから ω の部分集合については Δ_0 と Σ_1 と Π_1 と Δ_1 はすべて「論理式で定義可能」というのと一致することになります.

いっぽう HF 上では偶数の全体が Δ_0 でない Δ_1 集合の簡単な例になっています. また Σ_1 であって Π_1 でない（すなわち Δ_1 でない）集合も存在します. ただし, そのような集合の簡単な実例はありません. というのも, HF 上の Δ_1 がインフォーマルな「決定可能」に対応しているため, そうした実例は決定不可能な集合でなければならないのです（定理 IV.2.2 参照）.

集合演算に関する次の性質も定義からたやすくわかります.

補題 II.17.27　任意の集合 A について,

（1） A 上の Δ_0 関係の全体は有限ブール演算のもとで閉じている.

（2） A 上の Σ_1 関係の補集合は Π_1 である.

（3） A 上の Π_1 関係の補集合は Σ_1 である.

（4） A 上の Σ_1 関係の全体, Π_1 関係の全体はいずれも有限個の和と共通部分をとる操作のもとで閉じている.

（5） A 上の Δ_1 関係の全体は有限ブール演算のもとで閉じている.

【証明】　Δ_0 論理式の命題演算子による結合がふたたび Δ_0 論理式となるので(1)が成立する. (2)については, $\neg\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \psi$ が $\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k \neg\psi$ と論理的に同値であることに注意する. (3)についても同様. (4)については, 束縛変数が重複しないように論理式を書き下せばよい. たとえば $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \psi \wedge \exists z_1 \exists z_2 \cdots \exists z_\ell \chi$ は $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \exists z_1 \exists z_2 \cdots \exists z_\ell [\psi \wedge \chi]$ と同値になる. 残る(5)は(2)と(3)と(4)から従う.　□

とくに A がしかるべき構造をもっている場合には, もっと多くのことが言えるようになります. 次の補題は A がたとえば極限順序数 γ に対する $R(\gamma)$ や無限基数 κ に対する $H(\kappa)$ である場合に適用できます.

補題 II.17.28　A が推移的で, A の要素の有限集合はすべてまた A の要

素になるものとしよう．このとき A^n のすべての Σ_1 部分集合 R を $\{\vec{a} \in A^n : A \vDash \varphi_\Sigma[\vec{a}]\}$ の形に，A^n のすべての Π_1 部分集合 R を $\{\vec{a} \in A^n : A \vDash \varphi_\Pi[\vec{a}]\}$ の形に，それぞれ書くことができる．ここで φ_Σ と φ_Π はそれぞれ適当な Δ_0 論理式 ψ について，$\exists y\psi$ と $\forall y\psi$ の形の論理式である．

【証明】　Σ_1 関係の定義は論理式 φ_Σ が $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \psi$ と複数の $\exists$ を含むことを認めている．ここで k は任意の有限の番号である．この k 個の存在量化の並びを一つにまとめるために，A に関する仮定を用いて，χ を $\exists y_1 \in y \cdots \exists y_k \in y\psi$ なる Δ_0 論理式とすれば $\exists y_1 \cdots \exists y_k \psi$ が $\exists y\chi$ と同値になることを用いよう．同様の議論が Π_1 の場合にもできる．□

補題 II.17.29　ある正則基数 $\kappa \geq \omega$ について $A = H(\kappa)$ とする．このとき A 上の Σ_1 関係の全体，Π_1 関係の全体，Δ_1 関係の全体は，いずれも有界な量化のもとで閉じている．すなわち，$n \geq 1$ かつ $R \subseteq A^{n+1}$ かつ R が Σ_1 であるとすると，$S := \{\vec{a} \in A^n : \exists b \in a_1[(b, a_1, \cdots, a_n) \in R]\}$ と $T := \{\vec{a} \in A^n : \forall b \in a_1[(b, a_1, \cdots, a_n) \in R]\}$ はいずれも Σ_1 である．Π_1 と Δ_1 についても同様．

【証明】　ここでは Σ_1 の場合を証明し，Π_1 の場合の（同様な）証明を演習問題として残す．Δ_1 についての結果は両者からただちに従う．

補題 II.17.28 により，R は Σ_1 論理式 $\exists z\psi(z, y, x_1, \cdots, x_n)$（ただし ψ は Δ_0 論理式）によって定義されていると仮定してよい．すると S は論理式 $\exists y \in x_1 \exists z\psi(z, y, \vec{x})$ によって定義され，これは $\exists z \exists y \in x_1 \psi(z, y, \vec{x})$ という Σ_1 論理式と同値である．

次に T は論理式 $\forall y \in x_1 \exists z\psi(z, y, \vec{x})$ によって定義される．モデル A においてはこの論理式は $\exists u \forall y \in x_1 \exists z \in u\psi(z, y, \vec{x})$ という Σ_1 論理式と同値である．この同値性のうち自明でないほうの含意を示すために，$\vec{x}$ を固定して（A において）$\forall y \in x_1 \exists z\psi(z, y, \vec{x})$ が成立していると仮定しよう．選択公理と $H(\kappa)$ の定義から，集合 $u \subseteq H(\kappa)$ を，$|u| \leq |x_1| < \kappa$ かつ $\forall y \in x_1 \exists z \in u\psi(z, y, \vec{x})$ となるようにとれる．ところがこのとき演習問題 I.14.20 により $u \in H(\kappa)$ となる．□

とくに Δ_1 については $\kappa = \omega$ で $A = HF$ の場合，Δ_1 が「決定可能」という意味だとすればこの結果は「自明」です．たとえば $R \subseteq HF^2$ で $S =$

$\{a : \exists b \in a[(b,a) \in R]\}$ だとすれば，R が決定可能という前提で $a \in S$ かどうかを有限探索で決定できるわけです．もちろん，「決定可能」というのはインフォーマルな概念にすぎないのですから，こんなのは「証明」とは言えません．わたくしたちが第 IV 章でやるように「決定可能」という概念をフォーマルに Δ_1 のことだと定義してしまうというなら，補題 II.17.19 を始めとするたくさんの補題を証明して，「決定可能」なるものがもつとインフォーマルに期待されるいろいろの性質を Δ_1 が実際に有することを示さねばならないのです．

演習問題 II.17.30　$A \preccurlyeq H(\aleph_1)$ となる集合 A はすべて推移的であることを証明しなさい．このことを用いて次のことを証明しなさい．ある可算で推移的な A が存在して，ある $b \in A$ に対する $\{b\}$ が A 上 Δ_0 にならない．
［ヒント］　$\emptyset \neq x \in A$ のとき，ある $f \in A$ が存在して $f\colon \omega \xrightarrow{\text{onto}} x$ となる．
□

II.18　弱い集合論

第 IV 章で証明するゲーデルの第 2 不完全性定理（IV.5.32）によれば，理論はそれ自身の無矛盾性を証明できないとわかります．ですから ZFC で考えているときには ZFC のモデルの存在を証明することができないのです．それでも，ZFC に含まれる部分理論のなかには，$R(\gamma)$ なり $H(\kappa)$ なりが手頃なモデルになっているために実際上しばしば登場する部分理論が存在します．そのような部分理論のいくつかをここで紹介します．Z と ZC についてはセクション I.2 ですでに述べたところです．

定義 II.18.1　語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ のもとで，ZC と $ZFC - Inf$ と $ZFC - P$ は，ZFC から置換公理あるいは無限の公理あるいは冪集合の公理を削除したものを，それぞれあらわすものとする．

また Z と $ZF - Inf$ と $ZF - P$ は，ZF から置換公理あるいは無限の公理あるいは冪集合の公理を削除したものを，それぞれあらわすものとする．

すでに確認したとおり，ZFC で考えているときには $\gamma > \omega$ で γ が極限順序数のときにはいつでも $R(\gamma) \models ZC$ となりますし，$\kappa > \omega$ で κ が正

則基数のときにはいつでも $H(\kappa) \vDash ZFC - P$ となります．また，$HF = R(\omega) = H(\omega) \vDash ZFC - Inf$ となっています．

ここで $A \vDash ZFC - P$ という命題は A において冪集合の公理が偽であると言っているわけではなく，A においてそれが真であると主張していないだけだ，ということを改めて強調しておきましょう．とくに，κ が強到達不能基数のときには，$H(\kappa) = R(\kappa)$ であってこれが ZFC のすべての公理のモデルとなります．（ただし，ZFC においては強到達不能基数が存在することを証明できないのですが．）

極限順序数 γ に対する $R(\gamma)$ と正則基数 κ に対する $H(\kappa)$ の両方で成立する弱い集合論を次に紹介しましょう．

定義 II.18.2　外延性の公理，内包公理，対の公理，和集合の公理，基礎の公理からなる理論を**コア集合論** CST と呼ぶ．

この CST は Z と $ZF - Inf$ と $ZF - P$ の共通部分として得られたもので，置換公理，無限の公理，冪集合の公理，選択公理を捨て去っています．CST のいくつかの定理がセクション I.6 と，セクション I.7 の定義 I.7.7 までに述べられています．

置換公理も冪集合の公理ももたない CST では，二つの集合の直積集合の存在すら証明できないので，弱すぎて意味のある命題は何ひとつ証明できないように見えるかもしれません．しかし実際には自然数論と有限組合せ論の基本的な理論が CST において展開できます．これを見るために，有限なオブジェクトたちが期待どおりに振舞ってくれることを，CST から証明することにします．まずは「有限」ということの定義と，それに関連した概念の定義を書き出します．このことが必要になるのは，CST が弱過ぎて「明らかに同値」ないろいろな定義の同値性が証明できないおそれがあるからです．

定義 II.18.3　次のように論理式を定義しよう：

（1）　$\mathrm{trans}(x)$ とは x が推移的であるということ．

（2）　$\mathrm{nat}(x)$ とは x が自然数であるということ．

（3）　$\mathrm{bij}(f, x, y)$ とは f が x から y の上への全単射であるということ．

（4）　$\mathrm{Fin}(x)$ とは $\exists n, f[\mathrm{nat}(n) \wedge \mathrm{bij}(f, n, x)]$ ということ．つまり x が有限であるということ．

（5）　$\mathrm{HrdFin}(x)$ とは $\exists n, t, f[x \subseteq t \wedge \mathrm{trans}(t) \wedge \mathrm{nat}(n) \wedge \mathrm{bij}(f, n, t)]$ であること．つまり x が遺伝的有限であるということ．

このうち(1)–(3)については例 II.17.5 と補題 II.17.9 に示された Δ_0 論理式を用いるものとする．

そこで $\mathrm{Fin}(x)$ は x が有限であると主張する自然な Σ_1 の表現であり，同じく $\mathrm{HrdFin}(x)$ は x が遺伝的有限集合であること（$x \in HF$ であること）を主張する自然な Σ_1 の表現です．CST においては HF が集合になることを証明できないのですが，HF がクラスをなす（ただし真のクラスかもしれない）と考えることは可能なのです．同様に $\omega = \{x : \mathrm{nat}(x)\}$ のこともクラス（ただし真のクラスかもしれない）と考えられます．そこで，次の主張ができます．

補題 II.18.4（CST）　ω は $\in$ によって整列順序づけされる．

【証明】　これは ON に関する ZFC の結果（定理 I.8.5）に類似の結果である．わたくしたちの定義の $\mathrm{nat}(x)$ は Δ_0 論理式で，整列順序づけについては何も言っていない（言うことができない）けれども，ω が整列順序づけされていることは CST の一部である基礎の公理から従う．すなわち，空でない任意の集合 Y に $\in$-極小要素が存在するが，とくに Y が自然数ばかりからなる集合のときには，Y は最小の数をもつことになる．　□

次には通常帰納法の原理（定理 I.8.14）が成立することを示します．CST では ω が集合であることを証明できないので，この原理も次のように言い替えることにします．

補題 II.18.5（*CST* **における通常帰納法の原理**）　任意の論理式 $\varphi(x)$（他の自由変数を含んでもよい）に対して，論理式

$$\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \to \varphi(S(x))] \ \to\ \forall x[\mathrm{nat}(x) \to \varphi(x)]$$

の全称閉包が CST から証明できる．

【証明】　n が自然数で $\neg\varphi(n)$ となるものとしよう．$Y = \{x \in S(n) : \neg\varphi(x)\}$ とおく．すると定理 I.8.14 の証明と同様にして，Y は自然数の空でない集合となるので最小の要素をもつことになって矛盾に至る．　□

有限集合に対する通常の集合論的な操作は CST で実行できますが，この

ことの正当性の検証は *ZFC* におけるよりも手間がかかります．このあとの二つの補題がその例になっています．

補題 II.18.6（CST） $\mathrm{nat}(m) \wedge \mathrm{nat}(n)$ であるとき，

（1） $\mathrm{bij}(f, m, n) \to m = n$.

（2） $\mathrm{bij}(f, m, x) \wedge \mathrm{bij}(f, n, x) \to m = n$.

【証明】 (1) については $\max(m, n)$ に関する帰納法による．その細部は自然数が基数であることの *ZFC* における証明（定理 I.11.17）と同じである．(2) は一見すると $\mathrm{bij}(g^{-1} \circ f, m, n)$ となって (1) から明らかに見える．だが $g^{-1} \circ f$ の存在は大丈夫だろうか．これを示すために，m 以下の自然数 j に関する帰納法で，すべての $i < j$ に対して $g(h(i)) = f(i)$ をみたす函数 $h : j \to n$ の存在を示しなさい． □

補題 II.18.7（CST） x と y が有限集合であれば $x \times y$ と $\mathcal{P}(x)$ が存在する．また，x と y が遺伝的有限集合であれば，$x \cup y$ も $x \times y$ も $\mathcal{P}(x)$ も遺伝的有限である．

【証明】 $\mathrm{Fin}(x)$ のとき $|x|$ によって $\mathrm{nat}(n) \wedge \exists f\, \mathrm{bij}(f, n, x)$ となるような n をあらわすことにしよう．このような n は補題 II.18.6 により一意的に定まる．

まず和集合について考えよう．和集合の公理があるので $x \cup y$ は確かに存在する．そして x と y が有限集合のとき $x \cup y$ も有限である．これを示すために $|y|$ に関する帰納法を用いる．すなわち，n に関する帰納法によって $\forall x, y, f[\mathrm{bij}(f, n, y) \wedge \mathrm{Fin}(x) \to \mathrm{Fin}(x \cup y)]$ を証明する．$n = 0$ の場合 $y = \emptyset$ だから自明である．後続者の場合を見るために，$\mathrm{bij}(f, S(n), y) \wedge \mathrm{Fin}(x)$ となっているとしよう．$p = f(n)$ とおけば $\mathrm{bij}(f, n, y \setminus \{p\}) \wedge \mathrm{Fin}(x)$ である．帰納法の仮定により $x \cup (y \setminus \{p\})$ は有限集合である．そのサイズを k としよう．すると，$x \cup y$ から（$p \in x$ の場合）k の上へ，あるいは（$p \notin x$ の場合）$S(k)$ の上へ，全単射を容易に構成できる．

また，x と y が遺伝的有限集合であれば推移的で有限な t と u を $x \subseteq t$ かつ $y \subseteq u$ となるようにとれる．このとき $x \cup y$ は推移的集合 $t \cup u$ の部分集合であり，したがって $x \cup y$ も遺伝的有限集合である．

冪集合について．$|A|$ に関する帰納法で，A が有限集合ならいつでも $A \cup$

$\{v \cup \{p\} : v \in A\}$ が存在して有限であることを示しなさい．次に，$|x|$ に関する帰納法で，x が有限集合ならいつでも $\mathcal{P}(x)$ が存在して有限であることを示す．$|x| = 0$ の場合は $\mathcal{P}(\emptyset) = \{0\} = 1$ であるからこれは明らかだ．後続者の場合は，先ほどと同様に $p \in x$ と有限集合 $A := \mathcal{P}(x \setminus \{p\})$ が与えられ，$\mathcal{P}(x) = A \cup \{v \cup \{p\} : v \in A\}$ となる．

また $\mathrm{HrdFin}(x) \to \mathrm{HrdFin}(\mathcal{P}(x))$ であることは $x \cup y$ の場合と同様に示される．

直積集合については $x \times y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ を用いればよい．　□

こうして *CST* において自然数 m と n の積と和と冪を $m \cdot n = |m \times n|$, $m + n = |m \times \{0\} \cup n \times \{1\}|$，$m^n = |{}^n m|$ と定義できます．

有限集合が期待どおりの振舞いをすることが *CST* から証明できるので，すべての集合が遺伝的有限であると主張する公理の導入を検討するのも自然なことでしょう．しかしそうすると当然，すべての $R(\gamma)$ と $H(\kappa)$ で成立する理論ではなくなってしまいます．

定義 II.18.8　語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ における理論 *PAS* とは *CST* に公理 $\forall x\, \mathrm{HrdFin}(x)$ を追加したものとする．

そこで $HF \models PAS$ です．*PAS* は *HF* の基本的な事実を公理化したもので，ω に関する基本的な事実を公理化するペアノ算術 *PA*（定義 II.18.11）の集合論版です．*PA* と *PAS* は「実質的に同値」です．これについては演習問題 II.18.12 を見なさい．

演習問題 II.18.9　*ZFC* − *Inf* のすべての公理が *PAS* から証明できることを示しなさい．

たんに無限の公理を削除することと，すべての集合が有限であるという主張を付け加えることの違いに注意しましょう．*CST* も *Z* も *ZF* − *Inf* も *ZFC* の部分理論ですが，*PAS* はそうではありません．〔訳注：語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Λ と Υ があって，定義 IV.5.1（332 ページ）の意味で Υ が Λ の拡大であるとき，Λ のことを Υ の部分理論といいます．〕

ここでペアノ算術 *PA* について考えましょう．*PA* は論理学の入門書で論じられる理論であり，集合論の知識はまったく必要としないのですが，これ

までの集合論的な扱いの線に沿って，まず（*ZFC* で考えられるべき）集合論の演習問題から始めます．

演習問題 II.18.10　N は集合，c はその要素とし，$\sigma\colon N \to N$ とする．これらについて

（7）σ は 1 対 1 函数である，

（8）$c \notin \mathrm{ran}(\sigma)$,

（9）$\forall X \subseteq N[c \in X \wedge \forall x \in X(\sigma(x) \in X) \ \to\ X = N]$

が成立すると仮定する．〔訳注： 番号が(7)から始まっている理由は下記参照.〕このとき $(N;\sigma,c)$ が $(\omega;S,0)$ と同型であることを証明しなさい．すなわち，函数 $f\colon \omega \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} N$ が存在して

（a）$f(0) = c$,

（b）すべての $n \in \omega$ に対して $\sigma(f(n)) = f(S(n))$

となることを示しなさい．

[ヒント]　(a)と(b)を函数 $f\colon \omega \to N$ の再帰的定義とみなしなさい．$\mathrm{ran}(f)$ に(9)を用いて f が全射であることを示しなさい．f が 1 対 1 であることを示すには $\exists m < n[f(m) = f(n)]$ をみたす最小の $n \in \omega$ に注目し，(7)と(8)を適用しなさい．

ここで(7) (8) (9)と番号づけしたのはペアノが 1889 年に著した『算術の基礎』[54] の最初のページに従ったのです．記法は現代のものに変更してあります．ペアノの(1)から(6)までは現代の観点からは論理の一般論と $\sigma\colon N \to N$ の意味づけに還元されます．ペアノがフォン・ノイマン流の順序数を知らなかったのは確かです．ペアノはカントールのインフォーマルな集合論を用いて(1)から(9)までを公理として仮定したのでした．これらの仮定にもとづき N を直接用いて，ペアノは自然数の加法と乗法の基本的な性質を展開しました．

ペアノの公理(9)はわたくしたちが定理 I.8.14 で述べた通常帰納法の原理と考えられます．N の部分集合全体に言及しているので，これは 1 階述語論理の公理ではありません．こんにちの論理学における *PA* すなわち**ペアノ算術**は（当時のペアノには知られていなかった概念である）1 階述語論理の範囲内でこれらの公理系を近似しようとするものです．この目的のための語彙 $\mathcal{L}$

としては演習問題 II.18.10 で示唆される $\{0, S\}$ どころか $\{0, <, S\}$ でも不十分です．演習問題 II.16.8 から明らかなとおり，**1 階論理**では 0 と $<$ と S から $+$ を定義することはできないのです．そこで $+$ と $\cdot$ をも $\mathcal{L}$ の記号に含めてしまいます．結果は次のようなものになります．これはクリーネの [40] から採ってきたものですが，文献によって多少の異同があります．

定義 II.18.11　PA とは語彙 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ における次の公理系のことである．すべての自由変数は全称量化されているものとみなす．

（a）$S(x) = S(y) \rightarrow x = y$.

（b）$S(x) \neq 0$.

（c）$x + 0 = x$.

（d）$x + S(y) = S(x + y)$.

（e）$x \cdot 0 = 0$.

（f）$x \cdot S(y) = x \cdot y + x$.

（g）各論理式 $\varphi(x)$ に対する $\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))] \ \rightarrow \ \forall x \varphi(x)$.

このうち (a) と (b) はペアノの公理のうち 1 階論理で書かれた (7) と (8) と同じものです．公理 (g) は**帰納法図式**と呼ばれるもので，各 φ ごとに一つの公理が対応する無限な図式で，これがペアノの (9) に対応しています．この点に関してペアノの [54] は 100 パーセント厳密ではありませんでした．ペアノは (7) (8) (9) から出発して，たとえば (c) と (d) を加法の定義として $x + c = x$; $x + \sigma(y) = \sigma(x + y)$ と書き，(9) を用いて y に関する帰納法で $x + y$ が《意味をなす》(sensum habet) ことを証明しました．フォーマルに ZFC で考えるなら，ペアノの《意味をなす》は，加法をあらわす部分函数で y をその定義域に含むものが存在する，という主張になり，再帰的定義についてのわたくしたちの定理 I.9.2 の証明において見られたようなものになるところです．

ペアノ算術 PA から，ω 上の加法・乗法・大小関係についての基本的な事実を導出するのはたやすいことです．大小関係 $x < y$ は，$\exists z[y = x + S(z)]$ によって定義できます．証明には帰納法を繰り返し用います．これ以外の，有限群の理論のような有限数学を導出するのはもっと困難です．なぜなら PAS と違って PA においては有限な群は理論の対象外だからです．その意

味で，PAS は有限数学の公理化として PA より自然なものといえます．それでも，実際のところ PA と PAS は同値な理論です．この同値性のうち片方の向きは次のようにたやすく証明できます．

演習問題 II.18.12　PA のすべての公理 ψ に対して ψ^ω が PAS から証明できることを示しなさい．ここでは記法 II.17.12 を用いていて，たとえば (公理 f)$^\omega$ は論理式 $\forall x, y[\mathrm{nat}(x) \wedge \mathrm{nat}(y) \to x \cdot S(y) = x \cdot y + x]$ の略記である．

したがって，PA のすべての定理が自然数において成立することが PAS で証明されるのです．アッカーマンの [1] で与えられた，この逆を示すための**構想**を述べるのも，同じく容易です．PA で考えて関係 E を演習問題 I.14.14 のとおりに定義します．この演習問題では，ZFC で考えて $(\omega; E) \cong (HF; \in)$ を示したのでした．ここでは PA で考えて，PAS のすべての公理が（$\in$ を E と読み換えて）成立することが示されます．

この構想を実行に移すにあたっての難点は，PA で考えて E が本当に定義可能かどうかが一見して自明でないところにあります．nEm とは m の 2 進数表現において第 n 位に 1 がある，ということでした．2 進数表現は 0 と 1 の有限列です．これに（あるいはこれと同値な E の他の定義に）言及するためだけでも，自然数の有限列について語る方法が必要となりますが，PA はもともと自然数についてしか語れません．有限列を扱うために，$\omega^{<\omega}$ の要素を ω の要素でコード（あるいは**ゲーデル数化**）します．ゲーデルに倣って，自然数の 3 つ組 (a, b, n) によって長さ n の列

$$\Big(a \bmod (b+1), a \bmod (2b+1), \cdots, a \bmod (nb+1)\Big)$$

をコードしましょう．このコード化は 1 対 1 ではないのですが，$b+1, 2b+1, \cdots, nb+1$ を互いに素であるようにとれば，すべての n-組がコードをもつことが中国剰余定理からわかります．PA においては $x \bmod y = z$ は加法と乗法を用いて定義できますから，$\exists s \in \omega^{<\omega}[\cdots]$ の形の主張も PA において $\exists a, b, n[\cdots]$ という形で表現できることになります．詳細についてはクリーネの [40] を見なさい．

ペアノ算術 PA は数理論理学の分野でたいへんよく知られており，PAS はその集合論への自然な翻訳です．弱い集合論 CST はあまり用いられてい

ません．今回これを採用したのは $H(\kappa)$ と $R(\gamma)$ という自然なモデルがあるからです．弱い集合論のうちで通常よく用いられるのがクリプキとプラテクの体系 KP です．この体系は CST の内包公理を $\varphi(x)$ が Δ_0 である場合に制限して弱めたうえで，ある種の置換公理

$$\forall x \in A \exists y\, \varphi(x,y) \ \rightarrow\ \exists B \forall x \in A \exists y \in B\, \varphi(x,y)$$

の $\varphi(x,y)$ が Σ_1 である場合を追加して得られます．通常の置換公理は $\forall x \in A \exists ! y$ と始まります．ZF においては両者は同値なのですが，KP は弱すぎて対応 $\alpha \mapsto R(\alpha)$ を作れないので，強い形の置換公理が必要なのです．

集合論 KP の推移的モデルは**容認集合**と呼ばれます．これらは一般化再帰理論が自然に展開される場であり，第 IV 章で証明される HF についてのさまざまな結果がすべての容認集合について成立するのです．これについてはバーワイズの [4] を見なさい．とくに，順序数の加法と乗法が定義され Δ_1 となります．このことから「たいていの」$R(\gamma)$ は KP を満たさないことがわかります．たとえば $R(\omega+\omega) \nvDash KP$ です．このことを直接確かめるには，対応 $n \mapsto \omega + n$ のグラフが Σ_1 なのに，$n \in \omega$ に対する $\omega + n$ の全体を含む集合が $R(\omega+\omega)$ に存在しないことに注意しなさい．

次に，真のクラスをモデルとして用いることについてコメントしておきます．主題は他の集合論にも関連していますが，わたくしたちは ZFC を主要な集合論としてそこに注力してきました．ZFC においては真のクラスは通常の集合論にあらわれるいかなるものをも超えてしまっていますが，PAS においては，ω ですら真のクラスです．

このトピックにはある意味ではすでに触れています．たとえば ON は全順序の公理の $\in$-モデルだ，という言い方ができます．これは I.8.5 の結果を述べたときに指摘したとおり，全順序の三つの公理を ON に相対化したものが ZFC から証明できるということを手短に言ったにすぎません．また，絶対性について論じたとき（定義 II.17.7 で）$A \preccurlyeq_{\varphi} V$ という記法を用いました．個々の φ についてはその意味するところは明白です．これはもっと長い $\forall x \in A[\varphi^A(x) \leftrightarrow \varphi(x)]$ という主張のメタ理論における略記であり，A が集合か，あるいは個々の真クラスの場合には意味をなします．

ところが，すべての論理式を一斉に扱おうとするときには，モデルの宇宙が集合であるという仮定が重要になってきます．不用意に真のクラスをモデ

ルとして扱うと困ったことになります．ZFC においては ZFC の各々の公理が V で真であることが証明できるので，$V \vDash ZFC$ であり，したがって $\mathrm{Con}(ZFC)$ となります．とすると $ZFC \vdash \mathrm{Con}(ZFC)$ ということになり，ZFC が矛盾することになってしまいます．ゲーデルの第 2 不完全性定理によって，無矛盾な理論は自分自身の無矛盾性を証明できないからです．第 2 不完全性定理の証明はのちほど（定理 IV.5.32）述べますが，ここでもっと初等的な方法で矛盾を導いてみましょう．

パラドックス II.18.13 ZFC は矛盾している．

【証明】 語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ においてちょうど 1 個の自由変数をもつ論理式全体の集合を $FORM_1$ としよう．すべての記号とすべての論理式が HF の要素となるように論理式の構文が定義されているものと仮定することができる．そこで

$$G = \{\, (\varphi, a) \in FORM_1 \times HF \,:\, V \vDash \varphi[a] \,\} \subseteq HF \times HF$$

と定義しよう．そこで $u \in HF$ に対する集合 $G_u := \{a : (u,a) \in G\}$ が定義可能な HF の部分集合すべてのリストになる．$\varphi \in FORM_1$ でないときは G_φ は空集合であり，$\varphi \in FORM_1$ であるときは，G_φ は論理式 φ で定義された HF の部分集合である．カントールの対角線論法を用いて $\mathbb{D} = \{u \in HF : u \notin G_u\}$ と定義しよう．このときすべての $u \in HF$ について $\mathbb{D} \neq G_u$ となる．（$\mathbb{D} = G_u$ ならば $u \in G_u \leftrightarrow u \in \mathbb{D} \leftrightarrow u \notin G_u$ となるから．）したがって $\mathbb{D}$ は定義可能でない．ところがわたくしたちは先ほど $\mathbb{D}$ を定義したわけだから，これは矛盾である．□

第 III 章で論じるとおり ZFC が無矛盾でないと考えた哲学者もいるかもしれませんが，ここで述べた「証明」が，たとえば CST のようなうんと弱い集合論でも通用するので，もっと用心深くなったほうがよいとわかります．実のところ，ここには何の矛盾もないのです．この「証明」をてっとり早く退けるには “$V \vDash$” という表現が意味をなすと仮定したところに誤りがあるのだと指摘すればよいのです．もっとも，この議論をきちんと再構成すればセクション IV.5 での第 2 不完全性定理の一つの証明が得られるのでもあります．

それにしても“$V \vDash$”が意味をなさないというのはどうしたことでしょうか．真のクラスに関する主張が適切な解釈のもとで意味をなす実例なら，すでにいくつも見てきたではありませんか．それでも，

演習問題 II.18.14　定義 II.7.8 における $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\sigma]$ の定義を調べて A が真のクラスだったらどこがうまく行かないかを説明すること．

［ヒント］　わたくしたちは $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\sigma]$ を $\mathrm{lh}(\varphi)$ に関する再帰で定義した．長さに関する再帰は順序数に関する再帰として定理 I.9.2 を用いてその正当性を ZFC で保証できる．すなわち，固定された $\mathfrak{A}$ に対して $F(\delta) = \{(\varphi, \sigma) : \mathrm{lh}(\varphi) < \delta \wedge \mathfrak{A} \vDash \varphi[\sigma]\}$ を定義したのだった．σ は変数記号の全体から A への函数なので，A が真のクラスのときには $F(n)$ も真のクラスとなる．ZFC においては ON のような特定の真のクラスについては略記として語ることができるけれども，真のクラス全体にわたる量化はできない．とすると，定理 I.9.2 の証明において帰納法で検証した $\forall \delta \exists ! h \, \mathrm{App}(\delta, h)$ という主張をいったいどのように言いあらわしたものか．　□

パラドックス II.18.13 もパラドックス I.6.7 と同じく「定義可能」という概念に関して少しばかり杜撰であった結果として生じたものです．杜撰な推論のために道を誤る可能性について考えると，わたくしたちがこれまでに述べてきた次の二つの主張が怪しいと思われるかもしれません．

（1）　第 2 不完全性定理によって ZFC で考えている限り ZFC のモデルの存在を証明することは（ZFC が無矛盾であるかぎり）できない．（250 ページ）

（2）　独立性証明を成し遂げるためには推移的モデルが用いられる．たとえば $A \vDash ZFC + \neg CH$ となるような推移的モデル A を構成できる．（237 ページ）

だとしたら $A \vDash ZFC$ のはずで，(1) と (2) は見たところ矛盾しています．CH や $\neg CH$ のモデルの構成の詳細は本書の守備範囲ではありませんが，ここで (2) の背後にあるロジックについてきちんと書いておきましょう．

まず，ZFC の任意の**有限**部分集合 Σ について ZFC から $M \vDash \Sigma$ となる推移的集合 M の存在が証明できます．これはさほど難しくありません．次の演習問題 II.18.15 を見なさい．それから，ここが文献 [36][41] などで解説

されている難しいところですが，こうしたモデルを操作することによって，ZFC の任意の有限部分集合 Σ について，ZFC から $A \vDash \Sigma + \neg CH$ となる推移的集合 A の存在が証明できます．

さて，$ZFC \vdash CH$ であったと仮定しましょう．フォーマルな証明は ZFC の何らかの有限部分集合 Σ だけを用いてなされます．ZFC で考えて，$A \vDash \Sigma + \neg CH$ となる A が得られますが，$\Sigma \vdash CH$ なので $A \vDash CH$ でもあります．これは ZFC から矛盾が導かれたことを意味します．言い換えれば，ZFC が矛盾しないとすれば CH を ZFC から証明できないのです．

演習問題 II.18.15（**反映定理**） 語彙 $\mathcal{L} = \{\in\}$ の任意の論理式 $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ に対して，

$$\forall\alpha\exists\gamma > \alpha \bigwedge_{i<n} [R(\gamma) \preccurlyeq_{\varphi_i} V]$$

が ZF から証明できることを示しなさい．それから文の集合 Σ が ZFC の有限部分集合のとき $\forall\alpha\exists\gamma > \alpha\, R(\gamma) \vDash \Sigma$ が ZFC から証明できることを導きなさい．

[ヒント] すでに論じたとおり，上に示した文は集合論の一つの文の略記であることに注意しなさい．リスト $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ を拡張して，各 φ_i の部分論理式もこのリストに載っているものと一般性を損なうことなく仮定できる．そこで，タルスキ-ヴォート条件（補題 II.16.4）の類似が成立するような γ を見つけなさい．この議論には AC は用いられない．

論理式 φ_i が文である場合は $R(\gamma) \preccurlyeq_{\varphi_i} V$ とは単に $\varphi_i^{R(\gamma)} \leftrightarrow \varphi_i$ ということであるから，とくに φ_i が公理のときは，これは結局 $\varphi_i^{R(\gamma)}$ であるということに行き着く．そこで，AC は Σ に AC が含まれている場合にのみ，最後に用いられるだけである． □

演習問題 I.14.17 で論じた強い形の置換公理

$$\forall x \in A \exists y \psi(x,y) \ \rightarrow\ \exists B \forall x \in B \exists y \in B \psi(x,y)$$

も，次のように反映定理の特別な場合と考えられます．$\varphi_0(x,y)$ を $\psi(x,y)$ とし，$\varphi_1(z)$ を $\forall x \in z \exists y \psi(x,y)$ としましょう．$A \in R(\alpha)$ となるような α を固定し，$\gamma > \alpha$ で $R(\gamma) \preccurlyeq_{\varphi_0} V$ かつ $R(\gamma) \preccurlyeq_{\varphi_1} V$ となるような γ を選べば B として $R(\gamma)$ が用いられます．

演習問題 II.16.19 で超準解析を紹介しました．ε を無限小とすれば $(f(a+\varepsilon)-f(a))/\varepsilon$ に無限に近い実数が $f'(a)$ だ，という見方ができるのです．この観点を厳密に述べるために，わたくしたちは $\mathbb{R}$ に函数 f を追加したモデルの初等拡大を取ったのでした．これはひどく不器用なやり方です．というのも，解析学においては $\mathbb{R}$ 上のたくさんの函数を一度に扱うし，ことによるとすべての函数や空間を一挙に扱う場合もあるからです．では厳密にはどのモデルの初等拡大を取っているのでしょうか．本当を言えば，一切を含む全宇宙 V の初等拡大を取りたいところです．しかし V は真のクラスで現実に存在しませんし，V を不用意にモデルとして扱うことで論理の矛盾に導かれかねないことは，すでに見たとおりです．そこで V の代わりにしかるべき大きさの正則基数 κ に対する $H(\kappa)$ か，しかるべき大きさの極限順序数 γ に対する $R(\gamma)$ を用いることができます．$H(\kappa) \vDash ZFC - P$ であり $R(\gamma) \vDash ZC$ で，自分たちの扱いたい集合すべてが含まれるように κ や γ を十分な大きさに取ってしまえば，冪集合の公理や置換公理が使えないとしても問題にはなりません．微分積分や測度論の基本的なところであれば $\kappa = (2^{2^{\aleph_0}})^+$ あるいは $\gamma = \omega + \omega$ で十分です．次の二つの演習問題がこの方法の実例を述べています．

演習問題 II.18.16　M を CST の推移的モデルとして，演習問題 II.16.18 でやったように，$(\mathfrak{A}; E)$ を $(M; \in)$ の初等拡大として $\mathrm{nat}^{\mathfrak{A}} = \{a \in A : \mathfrak{A} \vDash \mathrm{nat}[a]\}$ とする．$\mathrm{nat}^{\mathfrak{A}}$ が ω を真に含む集合であると仮定しよう．そのような $\mathfrak{A}$ は演習問題 II.16.18 によって存在する．このとき次のことを証明しなさい．

（1）関係 E のもとで ω は $\mathrm{nat}^{\mathfrak{A}}$ の真の始切片であり，$\mathrm{nat}^{\mathfrak{A}} \setminus \omega$ には最小要素が存在しない．

（2）$p \in A$ を超準素数とする，すなわち $p \in \mathrm{nat}^{\mathfrak{A}} \setminus \omega$ かつ $\mathfrak{A} \vDash$ “p が素数” となるものとする．$G \in A$ は群であって $\mathfrak{A}$ にとっては位数 p の巡回群であるものとする．このとき現実の世界 V においては G は $\mathbb{Q}$ と初等的同値である．

（3）集合 $\mathrm{nat}^{\mathfrak{A}}$ はモデル $\mathfrak{A}$ で通例どおりに定められる演算 0 と S と $+$ と $\cdot$ のもとでペアノ算術 PA（定義 II.18.11）のモデルとなる．

[ヒント] (2)については G がねじれがなく可除であることを示せばよい. □

ここで(1)により E は整礎的でないので, $(A;E)$ はいかなる集合の要素関係 $\in$ とも同型になりません. それでも $\mathfrak{A}$ は基本的な集合論の原理を満たし, したがって基本的な数学的な事実, たとえば巡回群の性質とか, 整数の集合の中で素数の集合が有界でないことなども, $\mathfrak{A}$ は満たすことになります. (2)と(3)で記法の濫用をしていることにも注意しましょう. フォーマルには, A に属するオブジェクト G と $\circ$ があり, $\circ$ が G 上の群演算であって G が $\circ$ のもとで位数 p の巡回群になっている, という命題のモデルに $\mathfrak{A}$ がなっている, と言うべきです. $x \in G$ となる実際の要素 x はこの話に無関係で, (2)が実際に引き合いに出しているのは集合 $G' = \{a \in A : a\ E\ G\}$ であり, 群の積 $a \cdot b$ は $\mathfrak{A} \models a \circ b = c$ をみたす $c \in G'$ なのです.

また, $\mathfrak{A}$ が無限の公理を満たす場合には $\omega^{\mathfrak{A}}$ なるオブジェクトが存在して $\mathfrak{A} \models$「$\omega^{\mathfrak{A}}$ は自然数全体の集合である」となっているはずです. このとき $\mathrm{nat}^{\mathfrak{A}} = \{a \in A : a\ E\ \omega^{\mathfrak{A}}\}$ です.

また(3)から, 1階論理の体系 PA と演習問題 II.18.10 に述べられた元々のペアノの公理系の違いがわかります. 後者は自然数の全体を同型の意味で定めています. X として標準自然数の全体の集合を考えることができるので, $\mathrm{nat}^{\mathfrak{A}}$ は公理(9)を満たさないのです.

演習問題 II.18.17 演習問題 II.18.16 の記号で, ただしここでは $\kappa > 2^{\aleph_0}$ であるような κ について $M = H(\kappa)$ とする. したがって $\mathbb{R} \in M$ である. ${}^*\mathbb{R} = \{a \in A : a\ E\ \mathbb{R}\}$ としよう. 任意の函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ も M に属する. そこで $\mathfrak{A} \models f(a) = b$ となるような b を ${}^*f(a)$ とすることで ${}^*f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ を定めよう. 無限小の概念を演習問題 II.16.19 と同様に定めたとして, 任意の函数 f に対して次のことを示しなさい.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ が存在して実数 r に等しいためには, 任意の無限小 ε について ${}^*f(\varepsilon) - r$ が無限小またはゼロであることが必要かつ十分である.

(2) r と s を実数とするとき $f'(s)$ が存在して r に等しいためには, 任意の無限小 ε について $({}^*f(s+\varepsilon) - {}^*f(s))/\varepsilon - r$ が無限小またはゼロであることが必要十分である.

［ヒント］ まず “$\mathfrak{A} \vDash f(a) = b$” は本当は $\mathfrak{A} \vDash \varphi[f, a, b]$ の形で，この $\varphi(x, y, z)$ は $\langle y, z\rangle \in x$ ということを主張する集合論の論理式であることに注意すること．(1)については，$\lim_{x\to 0} f(x) = r$ が偽であれば正の実数 a が存在していくらでも大きな自然数 n について $\exists x[0 < |x| < 1/n \wedge |f(x) - r| \geq a]$ が成立する．このことは $\mathfrak{A}$ においても真であるはずで，$n \in \mathrm{nat}^{\mathfrak{A}} \setminus \omega$ に対してこのことを考えるとある無限小 ε について $|{}^*f(\varepsilon) - r| \geq a$ となる．□

II.19　その他の証明の理論

この章ではモデルの理論が主たる興味の対象で，証明の理論はその家来という扱いでした．完全性定理にしても，純然たるモデル理論的な結果であるコンパクト性定理やレーヴェンハイム-スコーレム定理を証明するための便利な方法でした．フォーマルな演繹体系が存在してくれるおかげで，セクション II.13（209 ページ）でやったように，公理の決定可能な集合 Σ が完全ならば Σ のモデルすべてで成立する文全体の集合も決定可能である，と主張できたわけです．ここまで，フォーマルな証明の実物を，どうにか「フォーマルな証明」の定義が理解できる程度に，ほんの少ししかお見せしませんでした．そのあと，フォーマルな証明が**存在すること**をデモンストレーションするいくつかのルールを導き出して，たとえばセクション II.11 では，

$$\emptyset \vdash \exists x \forall y p(x, y) \to \forall y \exists x p(x, y) \quad や \quad \emptyset \vdash \neg \forall x \psi(x) \to \exists x \neg \psi(x) \quad (\star)$$

のように，そうしたデモンストレーションのいくつかの例を示しました．このような著述のしかたは，抽象的な数学の洗礼をまだ受けていない初学者にとって，あまり心地よいものではないかもしれません．なにしろ，フォーマルな証明の概念がこの理論にとって基本であるのに，その実物がほとんど見当らないというのですから．ここで挙げた例のようなフォーマルな証明を，あまり苦労せずとも明示的に書き出せるようなフォーマルな体系も存在します．**自然演繹**はそうした体系の一つです．セクション II.11 に示した ($\star$) のデモンストレーションが「とてもフォーマル」に見えたことを思い出してください．それらのデモンストレーションが（ほんの少し構文を整えることで）本物のフォーマルな証明として扱えるような証明理論をきちんと定義することも決して難しくありません．この場合，EG, EI, UG, UI といったルール

が公式に証明の推論規則になるわけです．この方法には，実際のフォーマルな証明を書いてみせることが容易になるという長所があり，その一方で，フォーマルな証明とは何かということの定義が複雑になるという短所があります．自然演繹体系の詳細については，クワインが 1950 年に初学者向けに書いた本 [56] に述べられています．

フォーマルな証明を**実際に**書き出すということについての近年の研究者の関心は，主として，証明の理論の込み入った部分の扱いをコンピュータのプログラムに任せる**自動推論**というテーマに向かっています．自動推論は大まかに**検証系**と**自動演繹系**に大別されます．**検証系**ではユーザがコンピュータにフォーマルな証明を入力し，コンピュータがその証明が本当に正しいか（すなわち，フォーマルな証明の規則に則っているかどうか）を検証してくれます．自動演繹系では，ユーザがコンピュータに公理と望む結論とを入力し，コンピュータが**自動的に**フォーマルな証明を自分で見つけてくれるのです．これらの分野はセクション II.2 で概略を述べた証明の理論の目的その 1 とその 2 に該当しています．検証と自動演繹が別々の分野になっている理由は，現在のところ，コンピュータには本物の知性があるわけではないので，人間が証明を入力したあとでコンピュータが検証できる数学の水準が，コンピュータが自力で証明を発見できる数学の水準と比較してずっと高度であるからです．それでも，コンピュータの自動演繹系はすでに代数学の分野で新しい結果をもたらしています．このことについてはまた後ほどコメントすることにします．

検証系と自動演繹系で用いられる論理のシンタクスはお互いに大きく異なっていますし，セクション II.10 で説明したヒルベルト流のシンタクスから，どちらも大きくかけ離れています．

まず自動演繹系について見てみましょう．ここではマックーンが自身の古い OTTER システム（文献 [48]）をベースとして開発している Prover9 というシステムをとりあげます．これらのソフトウェアはいずれも大変洗練されたものですが，その背後にあるロジックを説明するのはいたって簡単で，得られるフォーマルな証明は，コンピュータがどうやってそれを見つけたのかがわからなくても理解できるものです．ここでは Prover9 の動作の実例を一つだけ紹介します．Prover9 のウェブサイト [49] では，もっとたくさんの例

のほか，このシステムのソースコードとマニュアルも公開されています．これらのシステムの背景となる数学上の理論はチャンとリーのテキスト [14] で説明されています．

よく知られているとおり，群の理論の公理化にさいしては，左単位元と左逆元の存在を仮定すれば十分で，右単位元と右逆元の公理はそこから導かれます．詳しく言えば，結合法則 $\forall x, y, z[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$ と公理 $\forall x[1 \cdot x = x]$ と公理 $\forall x[i(x) \cdot x = 1]$ から $\forall x[x \cdot 1 = x] \land \forall x[x \cdot i(x) = 1]$ が証明できるということです．インフォーマルな（数学的な）証明は，すべてのとは言いませんが，いくつかの初等群論のテキストで見ることができます．そうした証明をご存じなら，わたくしたちの体系でのフォーマルな証明が**存在する**ことを，セクション II.11 の方法を用いてデモンストレーションできることでしょう．そのデモンストレーションは演習問題 II.11.11 に似たものになり，ちょうどその演習問題と同様に，細部まできちんと作りあげることは少なからず面倒な仕事になるでしょう．**実際の**フォーマルな証明を書き出すとなれば，もう**とんでもなく**面倒なことになるはずです．もしも前もってインフォーマルな証明を理解していないとすれば，わたくしたちの体系でフォーマルな証明を書き出すことは事実上まず不可能でしょう．

この群論の結果はそれほど難しいものではないので，みなさんも少し考えてみれば自力でインフォーマルな証明を見出すことができるはずですが，それでも Prover9 が 5 ミリ秒たらずで証明を見出すのと比較すれば長い時間がかかるはずです．Prover9 はもちろん前もって証明を「知っている」とか「理解している」ということはありません．自動演繹系は単にシンタクスを操作しているだけなのですから．さらに，みなさんが前もって証明を知らなかったとしても，Prover9 の出力した証明を読んでフォーマルな論理に関する細部をすべて省いてしまえば，代数学の教科書に載せられるような証明ができあがるのです．このプログラムへの入力ファイルを以下に示します．いくつか注意をしておくと，% はコメント文字で，その文字からその行の終わりまではすべて無視されます．Prover9 は**反駁システム**になっています．三つの公理と，欲しい結論の否定文とを打ち込めば，プログラムがそれらからの矛盾の導出を試みるのです．これらの文を通常の論理の記法を用いて入力できるようにシンタクスが定められていますが，本書で用いているような記

法と比較すると，若干の明らかな変更が加えられています．たとえば ∀ は `all` になり ∧ は `&` になり ∨ は `|` になり ¬ は `-` になる，といった具合です．

```
formulas(sos).
    all x all y all z( x *(y * z)=(x * y)* z ).  % 結合律
    all x( 1 * x = x ).                          % 左単位元
    all x( i(x)* x = 1 ).                        % 左逆元
%(右単位元と右逆元) の不成立 :
    -( all x( x * 1 = x )& all x( x * i(x)= 1 )).
end_of_list.
```

出力は 165 行あって，証明だけでなく，統計情報や，どのように証明を見つけたかの追跡といった情報を含みます．Prover9 バージョン 2008-06A を用いて得られた出力からの抜粋を次に掲げます．

```
% Proof 1 at 0.00(+ 0.00)seconds.


1(all x all y all z x *(y * z)=(x * y)* z)
    # label(non_clause).  [assumption].
2(all x 1 * x = x)
    # label(non_clause).  [assumption].
3(all x i(x)* x = 1)
    # label(non_clause).  [assumption].
4 -((all x x * 1 = x)&(all x x * i(x)= 1))
    # label(non_clause).  [assumption].
5 (x * y)* z = x *(y * z).  [clausify(1)].
6 1 * x = x.  [clausify(2)].
7 i(x)* x = 1.  [clausify(3)].
8 c1 * 1 != c1 | c2 * i(c2)!= 1.  [clausify(4)].
9 i(x)*(x * y)= y.
    [para(7(a,1),5(a,1,1)),rewrite([6(2)]),flip(a)].
12 i(i(x))* 1 = x.  [para(7(a,1),9(a,1,2))].
13 i(i(x))* y = x * y.  [para(9(a,1),9(a,1,2))].
14 x * 1 = x.  [back_rewrite(12),rewrite([13(4)])].
15 c2 * i(c2)!= 1.  [back_rewrite(8),rewrite([14(3)]),xx(a)].
17 x * i(x)= 1.  [para(13(a,1),7(a,1))].
18 $F.  [resolve(17,a,15,a)].
```

ここに示した第 1 行目は出力された統計情報から抜き出してきたもので，証明を発見するために要した時間を 0.01 秒単位に四捨五入して表示しています．それ以降の各行が証明を構成します．探索動作は全体で 18 個の論理式

を生み出し，それらに(1)から(18)までの番号が振られていますが，「証明」として出力ファイルの末尾に書き出されるのは，証明に実際に関連した論理式だけです．このフォーマルな証明は三つの部分からなります．はじめの部分の(1) (2) (3) (4)は入力を改めて述べているだけです．続く(5) (6) (7) (8)は入力を**節**に書き直しています．第 3 の部分では，いくつかの節から別の節を導出することを繰り返して，$F であらわされる矛盾に到達して終了しています．

ここで節というのは定義 II.14.1 のとおりリテラルの選言のことです．節には量化記号が含まれず，すべての変数が全称量化されていると暗黙のうちに仮定されます．先ほどお見せした簡単な例では，入力行の(1) (2) (3)から単に全称量化を除去するだけで節(5) (6) (7)が得られます．いっぽう，結論を否定した(4)は実質的には存在文 $\exists x[x \cdot 1 \neq x] \vee \exists x[x \cdot i(x) \neq 1]$ です．そこで，存在するものとされた反例につける名前（すなわち定数記号）c_1 と c_2 をコンピュータが作り出して，節(8)を得ています．

Prover9 のほぼすべての使用例において，コンピュータはきわめて高速に入力を節に変換します．この手順は一般的には**スコーレム化**と呼ばれるもので，演習問題 II.16.15, II.16.16, II.16.17 の線に沿ってなされます．もっと込み入った例においては，矛盾の探索にはもっと時間がかかり，まったく矛盾が見つからない場合もよくあります．入力された文がそもそも矛盾していない場合や，コンピュータの持ち時間やメモリ容量の制限にひっかかった場合などがそうです．

先ほどの例において(9) (12) (13) (14) (15) (17) (18)で得られた矛盾 $F の導出に関して．フォーマルな証明のルールについて詳しくはマニュアルを読んでいただくことにしましょう．実際に Prover9 を利用してそれまで知らなかった証明を発見する場合には，出力結果を調べて，それを人間に理解しやすい形に書き換えることになりますが，そのことはすべての行をいちいち詳しく分析するまでもなく可能である場合が多いのです．この例では，欲しかった結論 $x \cdot 1 = x$ と $x \cdot i(x) = 1$ とは行(14)と行(17)に現れています．ですから，ユーザはそれらに注力することにして最終的な反駁のことは忘れてしまってよいわけです．行(9)は $x^{-1}(xy) = y$ で，これは結合法則(5)と左逆元(7)と左単位元(6)から $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y =$

$1y = y$ のように得られます．この(9)の x を x^{-1} に，y を x に書き換えることで，$(x^{-1})^{-1}(x^{-1}x) = x$ となり，(7)を用いて(12)の $(x^{-1})^{-1} \cdot 1 = x$ が得られます．次に(9)の x を x^{-1} に，y を xy に書き換えることで $(x^{-1})^{-1}(x^{-1}(xy)) = xy$ となり，(9)を適用して(13)の $(x^{-1})^{-1}y = xy$ が得られます．(13)で $y = 1$ とおいて，これを(12)と比較すれば，(14)の $x1 = x$ が得られます．最後に，(13)から $(x^{-1})^{-1}x^{-1} = x \cdot x^{-1}$ であり(7)から $(x^{-1})^{-1}x^{-1} = 1$ なので，(17)の $x \cdot x^{-1} = 1$ を得ます．この証明はすべての数学者にたやすく検証してもらえることでしょう．コンピュータの出力との対応を保つために言い回しがちょっと不器用なので，学部生向けのテキストに掲載する前には，少しばかり文章を揉みほぐしておきたいと思うかもしれません．

Prover9は等式を他の等式に代入する何百万ものやり方を簡単に調べ上げてしまいますから，ここに示した例のように推論の大部分が等式を扱っているような場合，しばしば人間をはるかに上回る能力を示します．集合論のような分野ではProver9は人間よりはるかに劣ります．ですから主に代数学で新しい結果を見つける目的で使われています．もっとも実際には群論でProver9が新しいことを見つけたことはありません．というのは，群論において等式ばかりで書ける部分というのはたいてい自明なことで，興味ある結果は群の構造に関する定理にあるからです．たとえば，位数が素数の群はすべてアーベル群である，という命題は公理系 GP から証明できる定理ではなく，むしろ ZFC から証明できる GP のモデルに関する定理です．この定理を基本的な言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ で表現しようとしたらとんでもなく長い命題となるはずで，この定理を人間の助けなしに自力で導出できる自動演繹系はありません．

代数学においてループ（亜群）というのは，群とよく似ているけれども結合法則が成り立つとは限らないものです．それらについての従来の研究（たとえばブルックの[9]）には一つの等式から他の等式を導く込み入った導出がたくさん含まれています．ですから，ここで自動演繹系が有用であることも，そして近年のループに関する論文（たとえば[39]）にOTTERやProver9を用いて発見された証明が掲載されていることも，驚くにはあたらないでしょう．

名高い四色問題の証明の場合のように，コンピュータの助けを借りた証明

について提起されてきた哲学上の疑問についてもコメントしておきます．たとえば，人の手ですべての細部を検証されていない証明は信用できるのか，といった疑問です．こうした疑問は，ここでは関係ありません．なぜなら，自動演繹系を用いたとき，証明の探索にとても長くかかったとしても，最終的に得られる証明は，通常は人間が 1 行ずつ検証していける程度の短いものになるからです．文献 [39] などの論文では，使用したソフトウェアこそ明記していますが，コンピュータの出力をそのまま掲載しているわけではなく，先ほどの例でやったように，従来の数学の議論として述べ直しているので，文献 [9] に親しんだ数学者であれば，たやすく読むことができるのです．

証明理論における体系，あるいはどのようなシステムにせよ，それが**フォーマル**（formal）なものとされるのは，（日常言語で表現されるインフォーマルな証明と異なり）形成（formation）の精密な規則をもつからです．ですからコンピュータのプログラムが出力する証明は，ほとんど定義によりフォーマルです．コンピュータのプログラムによって形成の規則が定められているからです．ところが，Prover9 のような自動演繹系の扱えるシンタクスと Mizar のような検証系の扱えるシンタクスの複雑さの度合いには大きな開きがあります．出力のうちブラケットで囲われたコメント部分を無視してしまえば，上の例に示した証明は，通常の数理論理学のものと非常に近いものになります．その証明の規則も [14] などの文献にきちんと定義されています．Prover9 の複雑さはすべて証明探索のためのものであり，証明の規則そのものの複雑さではないのです．

さて，Mizar は公理的集合論の体系から出発し，フォーマルな証明をユーザが入力し，それをプログラムが検証する，というものです．新たな概念を定義することがルールで認められているので，いたって複雑な証明をも入力することができます．たとえば 2005 年にはコルニウォヴィツがジョルダンの曲線定理を Mizar で検証しています．これについて詳しくは Mizar のウェブサイト [47] で見ることができます．もちろんこの定理は集合論の基本の言語で述べられているわけではありません．命題の表現と証明には定義と補題の長い連鎖が必要で，これはたくさんの人たちが長年にわたって作り上げてきたものですが，それらすべてがフォーマルな証明の一部といえます．このほかの検証系には Isabelle/ZF [35] とか，ACL2 [2] とか，Coq [18] があります．

第 III 章
数学の哲学

哲学の知識が少しばかりあれば，数理論理学の話題の背後にある動機づけを正しく評価するのに有用です．集合論やモデル理論についてもこれはそのとおりで，第 I 章と第 II 章でも折にふれて哲学的なコメントをつけてきたところですが，再帰理論に関連したいくつかの話題，たとえばゲーデルの不完全性定理などについては，なおさらそのとおりです．

数学の哲学は，たくさんの本 [5][8][29][55][62] のテーマになっている大変大きな主題ですが，ここに示した簡単な概略だけでも，なぜそうした主題がこの本の主題に関係してくるのかを説明するには十分でしょう．

III.1 実際に真なのは何か

カントールの集合論以前から，数学的言明の真の意味についての哲学的な問いはあったのですが，これらは「単なる」哲学として捨て去ってしまってよいでしょう．たとえば $2+3=5$ とか $0.707 < \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 < 0.708$ とかの言明が，物理的な問題の解決に首尾よく適用できる抽象的な事実を言いあらわしているのは，明らかなことです．いっぽう，$(\beth_\omega)^\omega > \beth_\omega$ という言明は，ZFC の定理（I.13.13）ではありますが，なにか物理的な意味をもつかどうかがそもそも明らかでありませんので，無意味なものとして（ZFC もろとも）捨て去ってしまいたい誘惑に駆られかねません．

この疑問に対する哲学的アプローチは，雑に言えば，**プラトニズム**，**有限主義**，**形式主義**に大別できるでしょう．雑に言えば，これらはそれぞれ**信仰**，**無神論**，**不可知論**に類比されます．雑に言えば，有限主義者は $(\beth_\omega)^\omega >$

$\beth_\omega$ という言明を無意味だと言い，プラトニストはこの言明は有意味であるばかりか真でもあると言うでしょう．形式主義者はこの件にコミットしないかもしれません．彼らはこうした問題にかかわることなく暮らせるように工夫しているのです．

プラトニズム　現代の数学におけるプラトニズムとは，$\mathbb{R}$ とか $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 等々の無限集合が，なんらかの理想界において現に意味をなす，とする観点です．*ZFC* の公理はこの理想界に関する真実を述べているものであるから，$(\beth_\omega)^\omega > \beth_\omega$ なる言明は有意味であるばかりか真でもある，と 現代の多くの プラトニストは主張することでしょう．同様に $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ と主張する *CH* も有意味であり，現時点でわたくしたちはその真偽を知らないけれども，真であるか偽であるか，どちらかには違いない，*CH* が *ZFC* と独立であるという事実は，*ZFC* が理想界の真実のすべてではなく，ほんの一部しか言いあらわしていないことを意味する，というわけです．

先ほど「多くの」に下線を引いたのは，プラトニズムにも風味がいろいろあって，皆が皆 *ZFC* を不可侵の聖典としているわけでもないからです．*ZFC* は数学的実践を形式化するものとして登場しました．その人気の秘密は，まずこの本のような初歩的な教科書で説明するのが容易であることと，（[36][41] などのような）独立性証明に取りかかるさいの手頃な公理の集合であることです．ただ，集合論研究者はみんなわかっていることですが，*ZFC* はなんら神聖なものではありません．数学を形式化するのに必要なことと比較すると *ZFC* は強すぎるんじゃないかと論じることもできるでしょう．$R(\omega + \omega)$ の中に住み込んでいても通常の数学の多くが実行できます．だとしたら（置換公理を除いた）*ZC* が適切な理論かもしれません．フォン・ノイマン順序数を便利に使いたいというなら，$\gamma = \beth_\gamma$ をみたすある γ（練習問題 I.13.18 を参照）に対する $R(\gamma)$ の中に住み込むべきでしょう．こうしたモデルに対する適切な理論を得るためには，まず *ZC* から出発して，各整列順序と同型なフォン・ノイマン順序数の存在とか各順序数 α に対する $R(\alpha)$ の存在といった置換公理からの帰結を必要に応じて付け加えていくことになるでしょう．こうして得られる理論は *ZFC* より弱く，また *ZFC* より不格好なものになるでしょうが，あの理想界において「真である」見込みは *ZFC* よりも大きくなることでしょう．逆に，別のプラトニストは，到達

不能基数の一つも作れない ZFC は弱すぎる，と論じるでしょう．$V \models ZFC$ をみたす集合論の宇宙 V が実際に存在するというのであれば，それはなにかより大きい宇宙の内部に存在セネバナラヌのです．だから，きっとあなたの V は，わたくしの宇宙のなんらかの $R(\kappa)$ にすぎないのです．この κ はあなたの宇宙にとっては ON ですが，わたくしにとっては一つの到達不能基数です．しかしそうすると，同じことのくり返しで，少なくとも二つの到達不能基数が存在セネバナラヌということになって…….

先ほど「現代の」に下線を引いたのは，プラトン自身がこうしたものの観方のもとで何を結論しようとしていたのかが明確でないからです．プラトンは確かに，数学はなんらかの理想界に関する真実を述べているもので，数学をやることは新しく何かを発明することではなく，理想界の真実を発見することだ，という考えを展開しました（[55] を参照）．とはいえ，当時の他のギリシャ人と同様，彼の考える数学の中心は幾何学における有限な作図でしたし，無限に関するものにはなんであれ大いに疑いの目が向けられていました．彼の理想界に無限集合が属していなければならないかどうかは不明です．こんにちプラトンが生きていたとしたら，彼の数学観はむしろ現代のわたくしたちが有限主義と呼ぶものに近かったかもしれません．

有限主義　有限主義者は有限集合だけを有意味なものと認めるので，CH などは無意味な言明として捨て去ってしまうことでしょう．プラトニストだったら，有限主義者は $R(\omega)$ つまり HF の中に住んでるんだ，ということでしょう（それどころか，あとで詳しく触れるとおり，有限主義者は古典論理すら認めません）．有限主義者でも，ω とその部分集合についての話には乗ってくれるかもしれません．それは彼らにとって便利なインフォーマルな記法であって，ちょうどわたくしたちが ZFC の展開において V とか ON とかの真クラスを便利なインフォーマルな記法として用いたのと同じことです．そこで，有限主義者は「素数全体の集合は無限である」という事実を，ユークリッドが（[24] 命題 IX.20 で）言いあらわしたとおり，素数の有限集合が与えられるごとに，その集合に属さない素数を作ることができる，という意味に理解することでしょう．有限主義者は ω の**任意の**部分集合にわたって量化された言明を有意味なものと認めないでしょうし，すべての部分集合を一つの集合 $\mathcal{P}(\omega)$ に集められるとは決して信じないでしょう．ですから，CH

などの $|\mathcal{P}(\omega)|$ に関する主張は，ぜんぜん意味をなさないというわけです．

有限主義者とてフォーマルな論理の構文と有限モデルの理論の通常の展開は認めるので，$\emptyset \nvdash \forall y \exists x p(x,y) \to \exists x \forall y p(x,y)$ であるとか，群論の公理から $\forall x, y[xy = yx]$ が証明できない（演習問題 II.11.16 とそれにつづくコメントを参照）といった主張を，真と認めることでしょう．同様に，ZFC が公理の「集合」であると認めることでしょうが，これは，言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ の文 φ が与えられるごとに，その φ が ZFC の公理であるかどうかをわたくしたちの ZFC の定義にもとづいて確認する手立てがある，という意味です．ですから，有限主義者は $ZFC \vdash (\beth_\omega)^\omega > \beth_\omega$ ということには同意するでしょうが，そもそも ZFC の公理なんて実際には無意味なんだから，そんな研究は時間の無駄遣いだ，と言うことでしょう．

形式主義　さて，形式主義者は，有限主義とプラトニズムのどちらとも共存できる不可知論的な立場をとります．形式主義者は公式見解として（ちょうど第 0 章でわたくしたちが述べたように）ZFC からの証明が数学を作り上げているのだと言います．これが，現在わたくしたちが学術論文の論文誌の掲載を認める基準になっています．もちろん，たいていの数学者はフォーマルな公理系を参照しながら証明を書いたりはしませんが，ZFC の範囲内で定式化できる原理だけを間違いなく使って書いた解析学の論文を投稿すれば，その論文の内容には間違いがないと査読者は判定します（論文誌に掲載する価値があるかどうかは，また別問題です）．論文の内容が CH や到達不能基数に依存するものだとしたら，そのことを著者が明記することを求められます．

この形式主義的公式見解は，それぞれの数学者が ZFC の意味などについて各自の私的見解をもつことを妨げません．そうした私的見解は出版された論文から読み取ることはできないのです．ある函数解析学の論文の著者はプラトニストかもしれませんし，ひょっとしたら，こうした論文を出版することを面白いゲーム（あるいは大学教授のイスへの早道）と考えた有限主義者ということもありえます．

あるいは，その著者は形式主義者かもしれません．そうした著者は，ZFC にいくぶんかの真実があるだろうけれど，どこまでが真実であるかを自分たちはまだ知らないのだと論じるかもしれません．現在のところ，いくらかの集合論的な概念，$\mathbb{R}$ とか $\mathbb{C}$ とか可微分多様体とかヒルベルト空間とかが，

近年の物理学に応用されているので，無限的な概念すべてを，まるきり無意味であるとして捨て去ってしまうのは，気がすすまないことでしょう．CH がかかわってくるような集合論的概念についてはそうした応用はまったく知られていませんが，そうした応用も未来にはあるかもしれません．そうしたことがいずれすべて明らかになる可能性はあります．その時まで，わたくしたちは数学の研究を続けることができます．

このことは，旧約聖書の「ヨナの書」を読んでも，（未詳の）著者の真意はわからない，というのと同じことです．著者自身はこの書のことを，史実だと思っていたのでしょうか．神意に従うべしという寓話のつもりだったのでしょうか．それとも単に面白いお話を書いただけで，実は神さまなんかまるで信じていなかったのでしょうか．

有限主義者と形式主義者はある点ではよく似ています．それは，「実際に真」と認められるのは明白に異論の余地のない有限的な推論だけであり，ZFC の公理やフォーマルな証明を記述するメタ理論としてはそれで十分である，と確信をもって主張する点です．どんな種類の数学をやっているかに，形式主義者と有限主義者の違いが出てきます．有限主義者は（ゲームに興じているのでないかぎり）きっと，有限組合せ論とか有限群論とかの，基本的な方法論がどのみち有限的であるような分野で仕事をすることでしょう．

形式主義者は数学のどの分野でも仕事ができますが，自分の仕事が ZFC のフォーマルな定理であると考える点でプラトニストとは違います．形式主義者と（現代の）プラトニストとは，彼らの数学に関するかぎり，識別不可能です．

ところが，哲学的な発想という面においては，有限主義者は（現代の）プラトニストに実によく似ていて，ただ彼らの理想界には有限集合だけしかないという点だけで異なっています．有限主義者もプラトニストも，真であるものすべてを包括するフォーマルなシステムなどは認めません．そしてその理由もほとんど同じです．ゲーデルの第二不完全性定理（定理 IV.5.32）によって，無矛盾な理論はそれ自体の無矛盾性を証明できないからです．あなたが実際に真であると認めているフォーマルなシステムがあったとすれば，その体系は無矛盾なはずであり，そしてこの無矛盾性は，この体系で証明できない真なる事実ということになるわけです．フォーマルなシステムの真実

さについて深く論じないことにしようと決心した形式主義者にとっては，この問題はさほどの関心をひきません．

有限主義にも（現代の）プラトニズムにも，いろいろ違った風味のものがあります．それぞれのプラトニストたちが，どの程度の無限的な方法を認めるかという点でいろいろと異なっているということについては，すでに言ったとおりです．プラトニストはフォーマルなシステムがすべての真実を包括することを認めないかもしれないにせよ，自分たちの信じていることに接近するために既存のフォーマルなシステムを利用することはあるでしょう．あるプラトニストは，暗黙のうちに，ZFC に加えて強到達不能基数が ON で共終であるという仮定のもとで考えているかもしれません．フーリエ級数の研究に打ち込んでいる別のプラトニストは，暗黙のうちに，ZC で考えているかもしれません．

有限主義のさまざまな風味が，「有限主義」ではなく「直観主義」とか「構成主義」という，異なった呼び名で言いあらわされています．彼らはみんな，古典論理を認めず，この本でわたくしたちの論理の基礎をなしている，ブール演算の真理値表（3 ページ）を認めません．とりわけ，わたくしたちにとってはトートロジーの一例にすぎない排中律 $\varphi \vee \neg\varphi$ を，彼らは認めません．彼らの言うには，そもそも選言 $\varphi \vee \psi$ を主張するときは，φ を検証できるか ψ を検証できるかどちらかである，ということを手短に言っているにすぎないので，φ が真であるか偽であるかわからないうちは $\varphi \vee \neg\varphi$ を主張するわけにいかないのです．

これについて例を示しましょう．自然数 n について $P(n)$ とは n が素数であるという主張，また，$T(n)$ とは $P(n) \wedge P(n+2)$ のことだとします．次の二つの主張を考えましょう

（1） $\forall m \exists n > m\, P(n)$.

（2） $\forall m \exists n > m\, T(n)$.

この (1) と (2) がどちらも有意味な言明であること，先に述べたユークリッドの（[24] での）証明に，m が与えられるごとにそれより大きな素数を得る方法が示されているがゆえに，(1) が真であること，このことについては誰もが同意します．また，双子素数予想としてよく知られている (2) が，現時点で（真偽）不明であることについても誰もが同意します．ここで，

$\exists n > m\,T(n)$ の場合にそのような最小の n を $f(m)$ とし，それ以外の場合は $f(m)=0$ とする，という函数 $f(m)$ の定義を考えましょう．たとえば $f(5)=11$ となります．有限主義者とその一味は，この f の定義を拒否することでしょう．というのも，$f(m)$ を計算する方法が示されていないし，$f(m)$ が有意味であるという主張が $\exists n > m\,T(n) \vee \neg\exists n > m\,T(n)$ という主張に依存しているいっぽう，$\exists n > m\,T(n)$ であるか $\neg\exists n > m\,T(n)$ であるかをあらゆる m について判定できる折り紙つきの方法など現時点ではどこにもないからです．

セクション II.18 で，フォーマルなシステム PA と PAS とが有限数学の表現になっているといいましたが，これらは古典論理にもとづいていて，先ほどの $f(m)$ のような定義を認めるので，有限主義者には受け入れられません．体系 HA（ハイティンク算術）は，論理外の公理は PA と同じですが直観主義論理にもとづいています．この論理はセクション II.10 で提示したヒルベルト流の論理体系に類似していますが，命題論理のトートロジーのすべてを公理として採用したりはしません．ですからわたくしたちが命題論理のすべてのトートロジーを公理にすると定義 II.10.1 で言ったのに相当する場所で，直観主義的証明論では公理として受け入れられるトートロジーのリストを示すことになります．たとえば $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ とか $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ などはこのリストに含まれますが，$\varphi \vee \neg\varphi$ は含まれません．これについて詳しくはクリーネの本 [40] を見てください．

直観主義者は HA を真な数学的原理を体現するものと認めるでしょうが，そうすると彼らは $\mathrm{Con}(HA)$ をも真と認めることになります．これは真であるけれども HA において証明可能ではありません．すでに指摘したとおりで，彼らは真なるものすべてを包摂するフォーマルなシステムを認めないことでしょう．有限主義者はもっと制約の多い信条を抱いているので HA すら認めません．どこに問題があるかというと，帰納法の公理 $\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \to \varphi(S(x))] \to \forall x\varphi(x)$ です．ここで φ はどんな複雑な量化を含んでいてもかまわなかったので，有限主義者に言わせれば，自然数に関するきちんと定義された属性の記述とはいえず，したがって帰納法を適用できないのです．原始再帰的算術（PRA）と呼ばれる，さらに弱いフォーマルなシステムが，帰納法の適用範囲を制限することで得られます．これにつ

いては [58] を見てください．この PRA が有限主義者の信じていることをおおむね近似的にあらわしていると考えられます．

しめくくりに二つの問いを考えましょう．厳密には何がメタ理論なのでしょうか？ それが，先ほどのことばで言えば，異論の余地なしであるはどうしてでしょうか，また，それがそもそもどうして無矛盾だといえるのでしょうか？

第一の問いについては，残念ながら，確実に言えることはありません．雑に言えば，前にも言ったとおり，メタ理論は有限な数や有限な記号表現のような有限な対象に対する基本的で有限的な推論です．ここで有限的な推論というものの精確な定義を試みることもできるでしょう——たとえば，上に触れた PRA において定式化できるような推論のことだ，としてもいいかもしれません．それでも，PRA（あるいは他のフォーマルなシステムでも）の定義をみてそれを理解しようとする段階で，基本的で有限的な推論を，あなたはすでに身につけていなければならないわけです．つまり，無から出発していたのでは何も説明できないのです．

第二の問いについては，残念ながら，確実に言えることはありません．思うに，メタ理論はわたくしたちが身の回りの事物について考える場合と同様の推論を用いるものなので，これは間違いないものでアラネバナラヌわけです．さもないとわたくしたちは誰も正気でいられませんから——しかしこれではもちろん証明にはなりません．そこで，この問いを ZFC が無矛盾であるかどうかという問いと比べてみましょう．仮に ZFC が無矛盾でなかったとしても，純粋数学の枠外にいるたいていの人たちにはなんの興味もないことでしょう．ひょっとすると，$\gamma = \beth_\gamma$ をみたす基数 γ のあたりに，すでに矛盾が潜んでいるかもしれません．それでも，多くの集合論者たちにとってすら，これはさほど影響がないのではないでしょうか．もちろん，こうした基数を生み出さないように公理系を改訂する必要に，わたくしたちは迫られます．ちょうどカントールの素朴集合論をツェルメロが公理化するにあたって $\{x : x \notin x\}$ を作り出さないようにせねばならなかったように．しかし，$2^{\aleph_0}$ とか $2^{2^{\aleph_0}}$ といった基数をめぐってなされている，集合論と独立性証明のかなりの部分が，今度の改訂にあたっても無傷で生き残ることでしょう．いっぽう，通常の有限的な推論が無矛盾でなかったとしたら，わたくしたち

はみな，身の回りの世界のことを考えるしかたを改訂せねばならなくなります．自分たちが正気であることをどうやって知るのかというのは，一般の哲学にとっては興味深い問いです．しかしながら，もはや数学の哲学からはかけ離れてしまいます．

III.2　偽りのない理解のために

あなたが現代のプラトニストで，*ZFC* の公理が明白に真であるとみなしているなら，この本に書かれた事実は，明白ではないにせよ真であるわけです．それらは *ZFC* から導かれるからです．あなたが厳格な有限主義者なら，この本に書いてあることはほとんどがゴミクズで，それを読んでいるあなたは時間の無駄遣いをしているわけです．

あなたは形式主義的な観点への手引きとしてこの本を利用することもできます．ただし，その場合には，うそ偽りの全然ない描像を得るために，くれぐれも注意して確認しておいていただくべきことが三つあります．

◉その１：フォーマルな論理の展開は二度なされねばならない

まずメタ理論において，ちょうどサブセクション I.7.2 でやったように始めます．メタ理論はまったく有限的なので，ひとまず異論の余地なしと考えましょう．メタ理論においてフォーマルな証明の概念を含むフォーマルな論理を展開します．そのさい，いくらかの（有限的な）定理を証明して，フォーマルな証明という概念が意味をなすようにしておかねばなりません．こうした定理のうちには，わたくしたちの証明の方法の健全性（補題 II.10.5）の有限的な言い直し，すなわち $\Sigma \vdash \varphi$ のときには Σ のすべての**有限**モデルにおいて φ が真であるということが，含まれます．

それから，*ZFC* の展開へと進み，*ZFC* **の中で**，モデル理論をも含む通常の数学のすべてを展開します．そのほとんどは，有限的ではありません．モデル理論の展開に際して，わたくしたちはフォーマルな論理をふたたび展開しなおさねばなりません．もちろん用いられる推論は同じものなのですが，今度は言語 $\mathcal{L}$ も対応する構造も任意の濃度をもつことができます．そして，推論は *ZFC* の中で定式化されます．

例として，これまでに *ZFC* の公理について論じてきたところを思い出し

てみましょう．「公理 $1, 2 \nvdash$ 公理 4」という言明は，演習 I.2.1 でやったように 1 要素モデルによって検証できたので，メタ理論における主張と考えることもできれば，また ZFC の中で定式化された定理と考えることもできます．ところが，「$ZFC - P \nvdash$ 公理 8（冪集合の公理）」という言明は，$H(\aleph_1)$ のような無限モデルが必要だったので，ZFC のフォーマルな定理と考えるほかありません．しかしここで $ZFC - P$ に公理 8 の否定を加えた公理の集合を Σ とすれば，「$\mathrm{Con}(ZFC) \to \mathrm{Con}(\Sigma)$」という含意はメタ理論における主張とみなすことができます．有限主義的な論法は次のとおりです．もしも Σ が無矛盾でなければ，Σ からの $\varphi \wedge \neg\varphi$ のフォーマルな証明が与えられるはずであり，ZFC の中で言明 $H(\aleph_1) \vDash \varphi$ が真でも偽でもあることが示されて，ZFC から矛盾を導くことができます．

このような「二度手間」の必要性は，とりわけフォーマルな論理の展開において混乱のもとになりがちではあるものの，フォーマルな論理に限ったことではなく，有限的な概念すべてにあてはまります．たとえば，小学校レベルの算術は有限的なメタ理論の一部をなしていて，わたくしたちは現に論理を展開するにあたって，（論理式の長さに関する帰納法などなどにおいて）それらを利用しています．しかしまた，ω に関して若干の基本的な事実をひととおり証明しておきさえすれば，小学校レベルの算術が ZFC の中で展開できることくらいはまあ明らかなことであろうと想定して，ひとつひとつの初歩的な事実には詳細な証明を与えないまま，ZFC の中でも，算術を使ってきました（覚え書き I.3.2 も参照してください）．

定義 II.17.10 と補題 II.17.11 が，理論とメタ理論の混同の原因の一例になっています．対応 $b \mapsto \delta_b$ は ZFC の中でモデル理論の展開の一環として定義されたものと考えることができ，その場合は，補題 II.17.11 は，モデル HF についての集合論の言語で表現された一つの文 $\forall b \in HF[\, HF \vDash \forall z[\, \delta_b(z) \leftrightarrow z = b]]$ を書きあらわしたものです．ところが，$b \mapsto \delta_b$ はメタ理論で定義されたものと考えることもできて，その場合は，補題 II.17.11 は，ZFC から $\forall z[\, \delta_{\{\{\emptyset\}\}}(z) \leftrightarrow z = \{\{\emptyset\}\}]$ が導かれるという主張を実例の一つとする，メタ理論における一つの図式ということになります．ひとつひとつの δ_b は Δ_0 論理式なので推移モデルに対して絶対的です．この絶対的という概念もまた，補題 II.17.6 をめぐる議論のなかで手短に指摘しておい

たとおり，二重の性格をもっています．まずいっぽうで，φ が Δ_0 式であれば，メタ理論において，（真クラスかもしれない）任意の二つの推移的クラス $A \subseteq B$ について $A \preccurlyeq_{\varphi} B$ であると主張できます．（実際には）これは *ZFC* の定理を生み出す一つの図式です．たとえば $B = V$ の場合に，

$$ZFC \vdash \forall A[\,\mathrm{trans}(A) \to \forall x \in A[\,\varphi(x)^A \leftrightarrow \varphi(x)\,]]$$

となります．ここでもちろん「$\forall A$」はすべての集合にわたる量化です．また，たとえば *ON*,*V* については

$$ZFC \vdash \forall x \in ON[\,\varphi(x)^{ON} \leftrightarrow \varphi(x)\,]$$

というぐあいに，この図式の二つの真クラスについての実例も言明できます．これらのことをメタ理論において証明するにあたっては，論理式 φ の長さに関する帰納法を用います．他方で，これは推移的集合モデルのペアについての *ZFC* の単一の定理

$$ZFC \vdash \forall A, B, \varphi\big[\,\mathrm{trans}(A) \wedge \mathrm{trans}(B) \wedge (\varphi \text{ は } \Delta_0)$$
$$\to \forall a \in A[\,A \vDash \varphi[a] \leftrightarrow B \vDash \varphi[a]\,]\big]$$

でもあります．この定理を *ZFC* において証明するには，ω の要素である $\mathrm{lh}(\varphi)$ に関する帰納法を用います．ですから実際には 2 とおりの帰納法があるわけですが，両者はその発想において本質的には同じことなので，証明は一回だけで済ませたのです．

こういう細かい点は，集合論を展開しているときにはたいてい忘れていられるのですが，セクション IV.5 での不完全性定理の議論においては，メタ理論での推論とフォーマルな理論での推論との区別が重要になってきます．たとえば $ZFC \nvdash \mathrm{Con}(ZFC)$ は，フォーマルな証明可能性をめぐるメタ理論における主張ですが，これを主張するためには，あらかじめ論理を *ZFC* の中で形式化して，$\mathrm{Con}(ZFC)$ が集合論のフォーマルな言語における一つの言明として書けるようにしておかなければなりません．

◉その 2 ： ZFC の無矛盾性は暗黙のうちに仮定されている場合がある

たとえば，つい先ほど $ZFC \nvdash \mathrm{Con}(ZFC)$ と言いました．これは *ZFC* が無矛盾でないかぎり間違いです．矛盾していればあらゆることが証明できてしまうからです．また，前のセクションでは *CH* が *ZFC* と独立であると

言いました．これは CH も $\neg CH$ も ZFC から証明されないという意味ですが，ZFC が矛盾していれば CH と $\neg CH$ の両方が証明できてしまいます．ZFC が無矛盾であると主張することは有限的な手法にもとづいているかぎり不可能なので，実は仮定としてそのことを付け加えておくべきだったのです．

とはいえ，第二不完全性定理も現代集合論における独立性の諸結果も，適切に言いあらわしさえすれば，有限主義的に妥当です．すでに 261 ページにおいて（より詳細には [41] において）述べたとおり，独立性の結果は，ZFC からの CH あるいは $\neg CH$ の証明を入力すれば ZFC からの矛盾の証明を出力するようなアルゴリズムを与えてくれます．それは，ZFC が無矛盾かどうかについていかなる信念をも持つことなく，まったく有限主義的に理解が可能です．あとでセクション IV.5 で述べるように，不完全性定理は ZFC だけでなく CST のあらゆる拡大に，それが無矛盾であろうとなかろうと，あてはまります．この定理が実際に与えてくれるのは，そうした拡大 Υ と Υ からの $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ の証明とを受けとって Υ からの矛盾の証明を出力するアルゴリズムなのです．

◉その 3 ： 理論と実践の間の深い裂け目

形式主義は数学を ZFC のフォーマルな定理の集まりとして提示するものと考えられています．しかし，数学が**原理的には** ZFC のフォーマルな定理の集まりと見ることもできることを示したのだ，と言ったほうが正しいでしょう．

すでにフォーマルな証明論を詳細に展開してきましたが，実際にフォーマルな証明を書き下すということは，あまりやりませんでした．実のところ，自明でない証明を定式化することはわたくしたちの証明論において現実に実行可能なものではないという点を強調せずに済ませてしまったのです．セクション II.19 では，数学の少なからぬ部分のフォーマルな展開の検証を現になし終えている，証明の理論のコンピュータへの実装に言及しました．それでもそうしたシステムの利用にはまだまだ厄介事が多いですし，あらゆる数学の成果がフォーマルな公理のなすシステムのフォーマルな定理としてオンラインで提示されているというには，まだほど遠い状態です．

ただ実のところ，たいていの有限主義者たちも，このことについてそれほど悩んでおらず，学術雑誌に掲載されるような数学のすべては（論文の著者が間違いを犯していないかぎり）原理的に ZFC の中で定式化できると喜んで認めているようです．ところが実際には誰ひとりとしてフォーマルな証明を現に書き下した人はいないのです．有限主義者たちの異議はむしろ，ZFC の公理がもともと真でないのだから，そういう数学をやるのは時間の無駄遣いにすぎない，ということのほうにあります．

論理以外での「原理的に」式の議論も，同じように有限主義的と認められています．たとえば，自然数 n についての $Q(n)$ は，$n \leq 1$ であるかまたは $n = ab$ かつ $a, b < n$ と n を因数分解できる，という主張だとしましょう．すると $\neg Q(n)$ は n が素数であるという主張になります．これについての排中律 $\forall n[\,Q(n) \vee \neg Q(n)]$ は，たいていの有限主義者にも認められています．というのも，**理論上**，n が与えられるごとに，有限の時間のうちに n を因数分解するかあるいは $\neg Q(n)$ を検証するか，どちらかが可能であるからです．それでも，**実践的には**こうした因数分解は，こんにちの技術では現実に実行可能とはいえません．実際，有限主義者であれ誰であれ，たいていの人は，大きな数 n についての因数分解が一般には現実に実行可能でないという（証明されていない）主張を信じて，コンピュータのデータ通信における RSA 暗号方式を信頼しているわけです．この暗号方式は整数の因数分解が現実には実行可能でないという仮定のもとで作られています．

とくに，整数 $n, j > 1$ について $j^n \not\equiv j \bmod n$ であることがチェックできたとすれば，有限主義者たちも $Q(n)$ が成立することをたいがい認めることでしょう．しかし実践的には，こうして「フェルマーの小定理」の不成立がわかったからといって，あなたが生きているうちに n の因数分解が見つかる保証はないのです．

第 IV 章

再帰理論

IV.1　概要

再帰理論はアルゴリズムのフォーマルな研究から始まりました．

アルゴリズムにしても，その効率にしても，インフォーマルな概念としては，うんと古い時代からありました．たとえば $0 < x < y < \omega$ なる x と y の最大公約数 $\gcd(x, y)$ を計算したかったとしましょう．ユークリッドは「これを実現する方法が存在するのは明らかだ．$1, 2, \cdots, x$ をすべてチェックして x と y の両方を整除する最大の数を選べばいい」などという，読者の知性を侮蔑するような指摘はしませんでした．ユークリッドはその代わり，彼の『原論』（[24]，命題 VII.2）において，引き算の繰り返しによってもっと効率よく $\gcd(x, y)$ を計算する方法があることを示しました．この方法はこんにちに至るまでユークリッドのアルゴリズム（互除法）として知られています．

アルゴリズムの概念は 20 世紀初頭に厳密化されました．カントールによって ω^ω のような函数の集合について考察する道が示されたからには，なんらかのアルゴリズムによって計算可能であるような函数の集合 $\mathcal{C} \subseteq \omega^\omega$ を厳密に定義しようと試みるのは自然な成り行きであったことでしょう．この集合 $\mathcal{C}$ のさまざまな（結果的には同値な）厳密な定義が，チューリング，ゲーデル，クリーネ，チャーチといった人々によって提案されました．$\mathcal{C}$ は可算集合です．というのも，厳密でない言い方にはなりますが，およそアルゴリズムを記述する手立てというものが可算個しかありえないからです．おまけに，ω^ω が可算でないことを示したカントールの論法はとてもシンプルなの

で，$\mathcal{C}$ に属さない函数のいたって明示的な実例を書き下すこともできます．実のところ，そのような函数の実例は数学の数々の分野に自然に登場します．

この本では，$\mathcal{C}$ の精確な定義として，ここまでのモデル理論や集合論における議論の精神にもっとも近い定義を一つだけ選んで提示します．それ以外のアプローチについては，このセクションで簡単に触れます．

再帰理論の古典的な業績は，現代のコンピュータ技術の到来に先立って得られましたが，こんにちでは，アルゴリズムというもののインフォーマルな理解を得るには，何かコンピュータにプログラムできるものと考えるのが最適でしょう．それで，この主題はコンピュータ科学と密接に関わっているのですが，再帰理論は，計算の純数学的な側面に焦点を合わせるため，たとえばこの宇宙の年齢だの大きさだのという実際上のささいな制約には目をつぶります．たとえばの話，定義 I.14.1 に従って $f(n) = |R(n)|$ と定めた函数は，明らかなプログラム（$f(0) = 0$，$f(n+1) = 2^{f(n)}$）があるので，確かに計算可能なのですが，$f(10)$ の数値を書ききることなど，地上にあるどんなコンピュータにも決してできないでしょう．

もちろんコンピュータは数値以外の対象も扱えます．ひとまずインフォーマルな議論として，D をコンピュータへの可能な入力のなす可算集合としましょう．D は ω かもしれませんが，コンピュータは数値の有限列についての計算もできるのですから，あるいは D は $\omega^{<\omega}$ かもしれません．また D は（論理や数学の）記号の有限列の集合でもありえます．セクション I.15 で説明したアプローチに従って，記号は実は自然数なのだとすれば，D は $\omega^{<\omega}$ の部分集合ということになるでしょう．実際に厳密な定義をするにあたって，有限的な数学は HF の中でなされるという期待に添うよう，わたくしたちは D として HF つまり $R(\omega)$ を用います．とくに，HF は，自然数でも記号列でもないけれどもコンピュータのプログラムが扱うことができるような有限的対象，たとえば有理数など，をも含んでいます．

ひきつづきインフォーマルな議論として，**計算可能な函数**と**決定可能な関係**という，二つの密接に関連しあった基本概念があります．

函数 $f\colon D^n \to D$ が**計算可能**であるというのは（インフォーマルには）それを計算するアルゴリズムがあること，すなわち，$x_1, \cdots, x_n \in D$ をコンピュータに入力して有限時間内に $f(x_1, \cdots, x_n)$ を出力させるようにできる

ということです．たとえば，$n=2$ として函数 gcd は計算可能です．この gcd のように常用されている函数について話すにあたっては，それらは自然な定義域の外へは自明な仕方で拡張されているものと考えることにしましょう．ですから，$D=HF$ とした場合，函数 $\gcd\colon D^2 \to D$ については，$x,y \in \omega \setminus \{0\}$ のとき以外は $\gcd(x,y)=0=\emptyset$ であるものとします．

n-項関係 $R \subseteq D^n$ が**決定可能**であるというのは（インフォーマルには）それを判定するアルゴリズムがあること，すなわち，$x_1,\cdots,x_n \in D$ をコンピュータに入力して有限時間内に（$(x_1,\cdots,x_n) \in R$ の場合に）「真」あるいは（$(x_1,\cdots,x_n) \notin R$ の場合に）「偽」を書き出させるようにできるということです．

この二つは実際には同等な概念です．D に数 0 と 1 が属しているとすれば，$R \subseteq D^n$ の特徴函数 $\chi_R\colon D^n \to \{0,1\}$ は D^n から D への函数ということになります．また，$f\colon D^n \to D$ であれば，「函数」の集合論的定義によって，f はそれ自身のグラフと同一視されるので，$D^n \times D$ またはそれと同一視される D^{n+1} の部分集合ということになります．このとき，まだインフォーマルですが，次のことがいえます．

（a） $R \subseteq D^n$ とする： R が決定可能であるためには $\chi_R\colon D^n \to D$ が計算可能であることが必要かつ十分である．

（b） $f\colon D^n \to D$ とする： f が計算可能であるためには f が D^{n+1} の部分集合として決定可能であることが必要かつ十分である．

実際の計算でよくやるように「真」に 1，「偽」に 0 を対応させれば(a)はインフォーマルには明らかでしょう．(b) $\Rightarrow$ については，f が計算可能だったとして，$n+1$-組 $(x_1,\cdots,x_n,y)$ が f（のグラフ）に属するかどうかは，$f(x_1,\cdots,x_n)$ を計算してから $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ であるかどうかみればよいのです．(b) $\Leftarrow$ については，わたくしたちのコンピュータが D の要素を $d_0,d_1,d_2,\cdots$ というぐあいにリストアップできると仮定せねばなりません．$D=\omega$ の場合は $d_k=k$ とすればよいし，$D=HF$ の場合は演習問題 I.14.14 でリストアップする方法を与えました．さて，f（のグラフ）が決定可能であったとしましょう．$f(x_1,\cdots,x_n)$ を計算させるために，コンピュータには $d_0,d_1,d_2,\cdots$ の順に $(x_1,\cdots,x_n,d_i) \in f$ かどうかをチェッ

クさせます．$(x_1, \cdots, x_n, d_i) \in f$ となる i を見つけた時点で d_i を出力させれば，これが $f(x_1, \cdots, x_n)$ です．

厳密な取り扱いにおいては，(a), (b) のどちらかが定義になりもう一方が補題になります．まず「計算可能な函数」の定義から始める取り扱いでは，(a) は「決定可能な関係」の定義となり，これらの定義について (b) が成立することは証明すべき事項になります．まず「決定可能な関係」の定義から始める取り扱いでは，(b) が「計算可能な函数」の定義となり，これらの定義について (a) の成立することは証明すべき事項となります．

「計算可能な函数」を定義する方法の一つは，なにかあるシンプルな抽象的コンピュータを定義することです．そしてそのコンピュータで計算できる函数が計算可能な函数だとします．ここでは計算の効率には関心がないので，こんにちのコンピュータの込み入った特徴などは全部切り捨てて，とてもシンプルで，それでいて，計算可能であってしかるべき函数をすべて計算できる程度に強力な，抽象的コンピュータを定義することが可能です．

チューリングは「計算可能な函数」を定義しました．彼にとっては D は何か $2 \leq k < \omega$ であるような k についての $k^{<\omega}$ でした．彼の**チューリング機械**への入力はテープに書かれた目印の有限列で，ひとつひとつの目印は $\{0, 1, \cdots, k-1\}$ から選ばれます．機械はテープにさらに目印をつけながら計算を進め，計算が終了したときに，出力もテープ上に現われます．

こんにちのコンピュータの仕組みに近い発想で「計算可能な函数」を定義するために，**レジスタ機械**が使われます．これは通常のコンピュータの CPU を抽象化したものです．ここでは $D = \omega$ です．わたくしたちの抽象的 CPU はアドレス指定可能な ω 個のレジスタをもち，それぞれのレジスタには自然数を一つ格納できます．機械のプログラムは，条件分岐命令とか，レジスタをインクリメントする（格納された値を 1 を加える）命令などの，いくつかの単純な命令から作られます．このアプローチは，シェファードソンとスタージスの [57] で用いられ，カットランドの教科書 [19] で詳しく展開されました．

逆方向から「決定可能な関係」を基本概念にすることもできます．その場合上記の (b) が「計算可能な函数」の定義になるわけです．こうしたアプローチでは，D は何らかの有限な言語 $\mathcal{L}$ に対する構造 $\mathfrak{D}$ の言及の範囲

とみなされます．$D = \omega$ であれば $\mathfrak{D} = (\omega; 0, S, +, \cdot, <)$ とすればよいし，$D = HF$ であれば $\mathfrak{D} = (HF; \in)$ とすることができます．

まず，「**明らかに決定可能**」な関係からなるクラス Δ_0 を定めるところから始めます．$D = HF$ の場合は定義 II.17.4 を用い，Δ_0 論理式とはすべての量化が有界な論理式――つまり，すべての量化が $\forall x \in y$ あるいは $\exists x \in y$ の形であるような論理式のことだとします．$D = \omega$ の場合にもほとんど逐語的に同じ定義を用いることができますが，この場合は「有界な」というのはすべての量化がある項 τ とともに $\forall x < \tau$ あるいは $\exists x < \tau$ という形であらわれることをいいます（HF については，言語 $\mathcal{L}$ が $\{\in\}$ であったので，変数だけが項です）．ですから，たとえば x が素数であるということは $S(0) < x \wedge \forall y, z < x[x \neq y \cdot z]$ なる Δ_0 論理式で定義されます．

そして「決定可能」は D 上 Δ_1 であることと定義されます．すでに Δ_0 が定義できたからには，Σ_1, Π_1, Δ_1 の定義は定義 II.17.21 のとおりにできます．わたくしたちが普段の数学において決定可能だとみなしているさまざまな関係が実際に Δ_1 であることを確認する作業は，もちろん必要です．これをセクション IV.3 でおこないます．

「ω 上 Δ_0」と「HF 上 Δ_0」は，同じ風味のものながら，同値ではありません．たとえば，偶数全体の集合は HF 上 Δ_0 でないのに（補題 II.17.19 を参照），$\exists y < S(x)[x = y + y]$ と書けるので ω 上では Δ_0 になっています．それでも，Δ_1 となると，両者について同じものが得られます．すなわち，$R \subseteq \omega^n \subseteq HF$ のとき，R が $(\omega; 0, S, +, \cdot, <)$ 上 Δ_1 であることと $(HF; \in)$ 上 Δ_1 であることとはたがいに必要かつ十分となります（演習問題 IV.3.30 を参照）．

再帰理論の叙述では，（カットランドの [19] のように）計算機械によるアプローチをとるにせよ，（ゴルドスターンとユダの [30] のように）Δ_1 定義によるアプローチをとるにせよ，たいがい $D = \omega$ となっています．これには一長一短があります．$D = \omega$ としておけば，集合論を勉強したことがなくて HF なんて聞いたこともない大部分の学部学生にもこの主題が近づきやすくなります．しかし，わたくしたちは，論理式とか有限群といった，いろいろな有限的対象の性質の決定可能性を議論します．これらは HF の中にありますが，自然数というわけではありません．$D = \omega$ とした場合，これらの

対象をなんらかの適当な方法で自然数によってコード化しなければなりません（これが**ゲーデル数化**と呼ばれる手順です．これについては演習問題 II.18.12 のあとの注記を見てください）．この本の読者はすでに HF に親しんでいるわけですから，（フィッティングの [25] のように）$D = HF$ としたほうが話が簡単です．このとき，有限的対象のいくつかの初等的な性質が Δ_0 でさえあり，したがって次に述べる定義により決定可能であることは，セクション II.17 ですでに見たとおりです：

定義 IV.1.1　集合 $R \subseteq HF^n$ が**決定可能**であるとは，R が Δ_1 であることだとする．函数 $f\colon HF^n \to HF$ が**計算可能**であるとは，f が HF^{n+1} の決定可能な部分集合であることだとする．

そこで，上に述べた言葉では，(b)がわたくしたちの「計算可能」の定義となり，(a)は証明を要する言明ということになります．この証明はセクション IV.3 の冒頭でおこないます．

わたくしたちの D は HF ですが，これを他の推移的集合 A たとえば HC などに置き換えたとき，何が起こるだろうか，と問うのは理にかなっています．これについてはすでに 113 ページ，233 ページ，258 ページでも言及しています．A がある弱い集合論（クリプキとプラテクの公理系．258 ページを参照）のモデルである限りは，「A 上 Δ_1」という概念から理にかなった一般化再帰理論が得られます．これについては，バーワイズの [4] で詳しく記述されています．

IV.2　チャーチとチューリングの提唱

この件についてのより深い議論が，スタンフォード大学オンライン哲学百科事典 [17] の該当の記事でなされています．

提唱 IV.2.1（チャーチ，チューリング）　関係 $R \subseteq HF^n$ がインフォーマルな意味で**決定可能**であるためには R が Δ_1 であることが必要かつ十分である．函数 $f\colon HF^n \to HF$ がインフォーマルな意味で**計算可能**であるためには f が HF^{n+1} の Δ_1 部分集合であることが必要かつ十分である．

数学や物理学は，もともと存在していたインフォーマルな用語に，精密な

定義によってフォーマルな意味を与えている例にあふれています．この正式な定義がインフォーマルな概念を「間違いなく捉えている」という主張は，決して精密な言明にはなりえないので，わたくしたちはこれを定理と呼ばず「提唱」と称することにしましょう．そうした提唱はそれぞれの主題についての哲学か社会学の一部です．一例をあげれば，「力」という観念は有史以前からあります．ニュートンの物理学においてこの観念に「運動量の微分 $d(m\vec{v})/dt$」というフォーマルな定義が与えられ，この定義は特殊相対性理論においても適切でありました．この正式な定義がインフォーマルな力の観念を間違いなく捉えているという提唱は「ニュートンとアインシュタインの提唱」と呼ばれてもおかしくないわけですが，実際には誰もこの用語を使ったことはありません．「チャーチとチューリングの提唱」はいろいろの文献に頻繁に現れますが．

いっぽう，二つの異なる**フォーマル**な定義が同値であるという言明は数学の一部であり，事実，「計算可能」をフォーマルに定義しようという試みは結果としてすべて互いに同値な定義を生み出しました．チャーチとチューリングはそれぞれに「計算可能」の定義を与えました．（どちらも「Δ_1 であること」というわたくしたちの定義ではありません．）それから二人とも，自分の定義した概念がインフォーマルな「計算可能」の観念を間違いなく捉えていると提唱しました．そこで，二人の提唱はお互いに同値であり，またそれはわたくしたちの提唱 IV.2.1 とも同値ということになります．

文献にあらわれる「チャーチとチューリングの提唱にもとづく証明」は，ある函数が計算可能であることを証明するために，計算の手順をインフォーマルに示すものです．これは，他の数学の分野によくある，読者に詳細を委ねる議論と，哲学的に同等です．一例をあげれば，線積分について論じていて，次のように言うことがあります： 楕円 $x = 3\cos t$； $y = 2\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ が点 $(1.4, 1.7)$ の周囲を反時計回りに 1 周することは，図を描けば明らかなことであるから，詳細は読者に委ねても大丈夫であろう．再帰定理の場合と同様に，本当にフォーマルな数学的議論を書き切ろうとすれば，その詳細は曲線の回転数のどんな定義をこれまでに学んできたかに依存することでしょう．そうした定義の考案者の名を挙げて「ポアンカレとブラウアーの提唱」を公表することもできそうです（誰もやりませんが）．

他の数学書の例に漏れず，この章も先に進むにしたがって読者に委ねる部分が多くなっていきます．ある関係 R が Δ_1 であることを示すために，最初のうちは R を定める Σ_1 論理式と Π_1 論理式を書き下します．しかしセクション IV.5 になったら，R に属するかどうか判定するためのアルゴリズムをインフォーマルに提示するだけで済ませ，それまでのセクションの内容に基づいて厳密な証明を与えることを，読者に委ねることにします．つまり，わたくしたちの証明も「チャーチとチューリングの提唱にもとづく証明」となるわけです．

チャーチとチューリングの提唱が適切であるというインフォーマルな議論はもちろんやっておく必要があります．一つの方向はいたって明快です．つまり Δ_1 関係はすべて決定可能です．セクション II.17（245 ページ）において，Δ_0 関係が，判定手続きをコンピュータのプログラムとして書き下せるという意味において決定可能であることが，すでに指摘されています．いま関係 $R \subseteq HF^n$ が Δ_1 であったとしましょう．R とその補集合はどちらも Σ_1 なので，（補題 II.17.28 によって）Δ_0 集合 $S, T \subseteq HF^{n+1}$ を，$\vec{a} \in R$ と $\exists x \in HF[\,(\vec{a}, x) \in S\,]$ が同値，$\vec{a} \notin R$ と $\exists x \in HF[\,(\vec{a}, x) \in T\,]$ が同値，となるようにとれます．そこで，HF の要素の（演習問題 I.14.14 で与えたような）ω-列 $d_0, d_1, d_2, \cdots$ を順に見て，各々の k について，$(\vec{a}, d_k) \in S$ となるだろうか，そうだったら $\vec{a} \in R$ であると告げて停止しよう，あるいは $(\vec{a}, d_k) \in T$ となるだろうか，そうだったら $\vec{a} \notin R$ であると告げて停止しよう，と調べていけば，$\vec{a} \in R$ かどうかを判定するプログラムができます．

このインフォーマルな議論は特定の抽象的なコンピュータを定義することによってフォーマルな議論になります．というのも，そうすればコンピュータのプログラムというものもこの特定のコンピュータのプログラミング言語で記述されたものと考えればよいからです．これはしかし，わたくしたちの特定の抽象的コンピュータがインフォーマルな「計算可能」の観念を間違いなく捉えているという主張へと，チャーチとチューリングの提唱を変化させているにすぎません．

チャーチとチューリングの提唱の逆の方向は，ここではまだ明らかになっていません．たとえば，階乗を計算する函数が，なぜ Δ_1 なグラフをもつのでしょうか．その答えは，いろいろの関係が実際に Δ_1 であることをセク

ション IV.3 で証明するまで，先延ばしにします．そのときに，次の定理も証明します．

定理 IV.2.2　HF の部分集合で，Σ_1 であるが決定可能でないようなものが存在する．

このようにわたくしたちが（提唱ではなく）定理をフォーマルに表明するときには，「決定可能」を Δ_1 とする特定の定義にもとづいて，数学的な証明を（この定理についてはセクション IV.4 で）与えることを念頭においています．

この定理は**停止問題の決定不能性**についてのチューリングの有名な結果と密接に関連しています．なんらかの入力 a を受けとるコンピュータのプログラム P を考えましょう．ここまでの議論の線に添って，$a \in HF$ であるものとします．$h(P)$ を，プログラム P に入力として与えたら計算がいつかは終了するような入力 $a \in HF$ の集合としましょう．わたくしたちがプログラムを組むときには $h(P)$ が HF 全体になるように心がけるわけですが，なんらかのバグによって $h(P) \subsetneq HF$ となることもあるでしょう．また，$h(P) = \emptyset$ となるようなプログラム P も簡単に作れます．チューリングが証明したのは，$h(P)$ が決定不能であるようなプログラム P が存在するということです．このことは定理 IV.2.2 から簡単に導かれます．計算のフォーマルな概念が展開されていない現段階では，以下の議論はまだインフォーマルなものです．上で述べたチャーチとチューリングの提唱のやさしいほうの向きの議論にならって，ただ $R \subseteq HF$ としては Σ_1 だが Δ_1 でないものを考えましょう．このとき，HF^2 の Δ_0 部分集合 S を $a \in R$ と $\exists x \in HF[\,(a,x) \in S\,]$ が同値になるようにとれます．プログラム P には HF の要素のリスト $d_0, d_1, d_2, \cdots$ を順に見ていって $a \in R$ かどうか判定させましょう．もしも $(a, d_k) \in S$ となる k があれば，プログラムは $a \in R$ であると告げて停止します．そのような k が存在しなければ，プログラムは永久に停止しません．したがって $h(P) = R$ となりますが，これは決定不能な集合です．

この議論により，どんな Σ_1 集合 $R \subseteq HF$ も，それが決定可能であれ決定不能であれ，あるプログラム P に対する $h(P)$ となることがわかります．文献によっては，Σ_1 集合はときに**再帰的可算**（r.e.）あるいは**計算論的可算**

(c.e.) と呼ばれます．というのも，そうした集合の要素のすべてをリストアップするプログラムが存在するからです．これには，上に述べた P を手直しして，いつまでも停止せず入力も受けつけないプログラムを考えます．プログラム P はこんどは $HF \times HF$ の要素のリスト $\{(a_k, d_k) : k \in \omega\}$ を順に見ていきます．$HF \times HF \subseteq HF$ なので，このようなリストは確かに作れます．$(a_k, d_k) \in S$ となるたびに，プログラムは値 a_k を書き出します．そうすると，プログラム P はいずれ R のすべての要素を書き出し，それ以外のものは何も書き出しません．この書き出しには ω 年かかるので，P を集合 R の決定手続きとして利用することはできません．そもそも R が決定不能なこともおおいにありうるのです．

あとは，チャーチとチューリングの提唱が言っていることと言っていないことについてもう少し詳しく調べましょう．この提唱は集合 $R \subseteq HF$ がアルゴリズムによって決定可能であれば，それが Δ_1 であると言っています．アルゴリズムというのは，どんな愚かな人でもそれに従って計算ができるような，指示の集まりです．この愚かな人は，自発性や洞察力をまるで欠いているのですが，入力 $x \in HF$ を読み取って，指示に機械的に従って，「はい」または「いいえ」の答えが見つかるまで，コツコツと一歩ずつ進み続けるのです．

チャーチやチューリングのようにとても聡明な何人もの人たちが，それぞれ独立に「アルゴリズムによって決定可能」ということの厳密な定義を見つけようと努力して，結果としてみんなが互いに同値な定義に落ち着いたという知見が，チャーチとチューリングの提唱へのわたくしたちの（インフォーマルな）信頼をさらに強化します．

インフォーマルな観念は，その性質上，精密ではないということを思い出しましょう．そうした観念は，その主題をより深く研究することを通じて，よりシャープになり，より限定されます．物理学を勉強したことのない人は，それでも日常言語の「力」という観念をインフォーマルに理解していますが，この理解は物理学者による定義「運動量の微分 $d(m\vec{v})/dt$」に精密に対応しなくてもよいのです．その人が間違っているのでも愚かなのでもありません．ただ，物理学では用いられるすべての概念が精密に定義されていなければならず，そして，力はこのように定義するのが有用なのです．これと

同様に，その人が「決定可能」についてインフォーマルな理解をしていてもかまわないし，またその理解が数学者による現行の定義にピッタリと対応していなくてもかまいません．この現行の定義は，純粋に数学的な手順に従って（あらゆる実践上の制限は無視した上で）有限な時間のうちに原理的に決定可能，というものです．「決定可能」の概念は他にも考えられ，理論計算機科学において考察されています．そのいくつかは実践上の制限を考慮し，いくつかは確率的な要素を手順に持ち込んでいます．

物理的実在の本性とか，人間知性の本性とか，要素還元論の妥当性とかについて，チャーチとチューリングの提唱はなんら哲学的に深い主張をするものではない，ということを，ここで強調しておきます．

究極の物理法則はいまだ知られていませんが，その一方で，すべての Σ_1 集合 $S \subseteq HF$ が物理実験によって決定可能であると想定してみることは可能です．入力 $x \in HF$ が S に属することと，x に応じて組み立てた大きな分子が（たとえば温度 100°C のもとで）安定で，たちまちのうちに分解してしまわないこととが，同値である，というように．ここで，究極の物理法則は，そうした分子が安定であるかどうかを「予言」してくれるかもしれません．そうした予言は原子核を構成するクォークにかかわる複雑な微分方程式の解の存在という形で与えられることでしょうが，微分方程式は実数や複素数にかかわっており，実数はそもそも HF の要素ではないのですから，微分方程式が解をもつかどうかを判定するアルゴリズムが存在するはずだと考える理由はありません．これとはまったく異なった筋道で，ブラックホールを回転させる物理実験によって Σ_1 集合を判定しようという考えがエテシとネメティの [23] に述べられています．彼らの示唆するところによれば，究極の物理法則を考えに入れて（ただし人の寿命などの実際的な制限はやはり無視して）新しい「決定可能」の概念を研究することもできるわけです．わたくしたちの提唱 IV.2.1 はこうした新しい概念が Δ_1 と同値であるとまでは主張していません．

同様に，人間の知性や洞察力の究極的な性質は解明されていませんので，なんらかの洞察を通じて，ひょっとしたら神や霊界との交信によって，Δ_1 でない集合を確実に判定できる人が存在すると想像してみることは可能です．**要素還元論**の哲学は，人間の知性を含む実在のすべては物理法則に還元

でき，魂や神々やその他の形而上学的コンセプトに頼らずに理解できると主張するものですが，仮にこの主張が正しかったとしても，それは Δ_1 でない性質を人間が判定する可能性を排除するものではありません．というのも，物理法則からの帰結は従来のアルゴリズム論的な意味では決定可能でないかもしれないからです．

決定可能でない性質を判定できる人や機械があるかどうかというのは，哲学と実践の両面からたいそう興味深いことなのですが，チャーチとチューリングの提唱とは明らかに無関係です．チャーチとチューリングの提唱が「明らかに真」であると考えない哲学者もいますが，反例があるという示唆がなされたことはありません．すなわち，決定可能だとみなされるべきだと考える人々がいるのに，Δ_1 であるかどうか不明である，というような関係 R が，明確に提示されたことはありません．

IV.3　HF 上の Δ_1 関係

定義 VI.1.1（Δ_1 であること）を決定可能な関係と計算可能な函数という概念の公式な定義に採用して，理論展開を続けましょう．はじめにセクション IV.1 の(a)の証明をします．

補題 IV.3.1　関係 $R \subseteq HF^n$ が決定可能であることと，特徴函数 $\chi_R\colon HF^n \to HF$ が計算可能であることとは同値である．

【証明】　$\Rightarrow$ の証明：R が Σ_1 論理式 $\varphi_\Sigma(\vec{x})$ と Π_1 論理式 $\varphi_\Pi(\vec{x})$ によって定義されていたとすると，$n+1$ 組の集合としての χ_R は $(\varphi_\Sigma(\vec{x}) \wedge y = 1) \vee (\neg\varphi_\Pi(\vec{x}) \wedge y = 0)$ で定義される．補題 II.17.24 によって，この論理式は Σ_1 論理式（と同値）である．ここでは $y = 0$ と $y = 1$ が Δ_0 論理式であることにも注意しよう．また，$(\varphi_\Pi(\vec{x}) \wedge y = 1) \vee (\neg\varphi_\Sigma(\vec{x}) \wedge y = 0)$ は Π_1 で，この論理式でも χ_R を定義できる．

$\Leftarrow$ の証明：χ_R（のグラフ）が Σ_1 論理式 $\psi_\Sigma(\vec{x}, y)$ で定義されていたとしよう．すると，Σ_1 論理式 $\exists y[\,y = 1 \wedge \psi_\Sigma(\vec{x}, y)\,]$ と Π_1 論理式 $\forall y[\,\psi_\Sigma(\vec{x}, y) \to y = 1\,]$ がどちらも R を定義することになる．これらの論理式がそれぞれ Σ_1 と Π_1 であることは補題 II.17.27 を用いて示される．□

もちろん $\forall y[\,\psi_\Sigma(\vec{x}, y) \to y = 1\,]$ は本当は Π_1 ではなくて，Π_1 論理式に

同値なだけです．これから先では，そうした区別は，同値性が明らかな場合には問わないでおくことにします．

上の $\Leftarrow$ の証明では，χ_R の Π_1 定義をぜんぜん必要としませんでした．実はすべての Σ_1 函数が自動的に Π_1 になるのですから，これは驚くにあたりません．

補題 IV.3.2　函数 $f\colon HF^n \to HF$ は Σ_1 だとする．このとき f はまた Π_1 でもあり，したがって計算可能である．

【証明】　f が Σ_1 論理式 $\psi_\Sigma(\vec{x}, y)$ で定義されていたとしよう．すると，f は Π_1 論理式 $\forall z[\psi_\Sigma(\vec{x}, z) \to z = y]$ によっても定義できる．　□

一般的な事実として Δ_1 は命題演算子による結合と有界な量化のもとで閉じているということ（補題 II.17.27 と補題 II.17.29）を思い出しましょう．ここまでは任意の正則基数 κ についての $H(\kappa)$ で議論できたのですが，冪集合函数が計算可能であることを示す次の補題は $\kappa = \omega$ の場合に特有のものです．正則基数 $\kappa > \omega$ については，κ が強到達不能基数でない限り $H(\kappa)$ は冪集合函数のもとで閉じてすらいませんし，強到達不能基数の場合でも，冪集合函数は Δ_1 にはなりません．HF において，有限集合の冪集合を書き下す手続きはインフォーマルには「明白に計算可能」ですが，わたくしたちはこのことを「計算可能」の公式な定義にもとづいて証明する必要があります．

補題 IV.3.3　函数 $f, g\colon HF \to HF$ を以下のとおりに定義すれば，それらのグラフは Δ_0 であり，したがって定義により，いずれも計算可能である：

（1）　$f(x) = \mathcal{P}(x)$.

（2）　$n \in \omega$ のとき $g(n) = R{\restriction}n$ とし，$n \notin \omega$ のときは $g(x) = \emptyset$ とする．ここで $R\colon ON \to V$ は定義 I.14.1 の函数であり，$R{\restriction}n = \{\langle i, R(i)\rangle : i < n\}$ である．

【証明】　f については，$x, y \in HF$ のとき $\mathcal{P}(x) = y$ が

$$\emptyset \in y \wedge \forall v \in y \forall z \in x[v \cup \{z\} \in y] \wedge \forall v \in y[v \subseteq x]$$

と同値であることによる．この論理式が Δ_0 であることは補題 II.17.9 の証明で用いた方法でわかる．g については，まず，補題 II.17.9 によって $n \in$

ω が Δ_0 であることに注意しよう．$n \in \omega$ のとき，$g(n) = y$ となるためには，y が函数であって

$$\begin{aligned}&\mathrm{dom}(y) = n \wedge [\, n = 0 \vee \langle 0, 0\rangle \in y\,]\\ &\quad \wedge \forall \langle i, u\rangle, \langle j, v\rangle \in y[\, j = S(i) \to v = \mathcal{P}(u)\,]\end{aligned}$$

となることが，必要かつ十分である．これらはいずれも Δ_0 であることが補題 II.17.9 の証明で用いた方法でわかる．□

この補題は，Δ_0 函数（すなわちグラフが Δ_0 である函数）という概念が，少しばかり奇妙であることを示しています．Δ_0 関係が「実に簡単」に判定できる一方，Δ_0 函数 $h\colon HF \to HF$ を計算することは「実に困難」です．というのも与えられた入力 x について $h(x) = z$ が成立しているかどうかの判定が（z のサイズを基準として言えば）「実に簡単」であったとしても，正しい z（それは x と比較してうんと巨大かもしれません）を見つけるまでに，長い時間を要するかもしれないからです．たとえばの話，$g(7)$ の値を書きだそうとしてごらんなさい．Δ_0 であることは計算の複雑さを測る基準にはならないのです．また，たとえば $E = \{\, 2n : n \in \omega \}$ とするとき，$\chi_E\colon HF \to HF$ は，補題 IV.3.3 で示した f や g よりもずっと速く計算できるはずなのに，Δ_0 ではありません．（補題 II.17.19 を参照．）$\chi_E\colon HF \to HF$ は Δ_1 であり（演習問題 II.17.23 参照），わたくしたちが「計算可能」の定義として採用したこの Δ_1 のほうが，Δ_0 よりも自然な概念です．このあとすぐに二つの Δ_1 函数の合成が Δ_1 であることを証明しますが，このことは次に示すとおり Δ_0 については正しくありません．

演習問題 IV.3.4　函数 $f\colon HF \to HF$ のグラフが Δ_1 であるとき，グラフが Δ_0 であるような函数 $g, h\colon HF \to HF$ を $f = g \circ h$ となるようにとれる．

[ヒント]　Δ_0 論理式 $\varphi(x, y, z)$ について $f(x) = y$ と $\exists z \varphi(x, y, z)$ が同値だったとしよう（補題 II.17.28 を参照）．このとき HF 上で $\forall x \exists z \varphi(x, f(x), z)$ と $\forall x \exists! y \exists z \varphi(x, y, z)$ が成立している．$\exists y, z \in R(n)\, \varphi(x, y, z)$ となる $n \in \omega$ の最小値を n_x とする．$R_x = R{\restriction}(n_x{+}1) = \{\, \langle i, R(i)\rangle : i \le n_x \}$ とする．$h(x) = \langle x, R_x\rangle$ とする．また，u が $\exists y, z \in (\bigcup \mathrm{ran}(S))\varphi(x, y, z)$ をみたす対 $\langle x, S\rangle$ でないときには $g(u) = 0$ としよう．u がまさにそのような対であ

るときには $\varphi(x, y, z)$ となるような一意的な y を $g(u)$ とすれば，それが $f(x)$ のはずである．□

もっと込み入った函数や関係が Δ_1 であることを証明しようとするときには，Σ_1 論理式と Π_1 論理式を詳しく書いてみせるのはきわめて面倒になるでしょう．補題 II.17.27 にある演算閉包性に訴えることで，この面倒さをある程度は回避できます．これはすでに利用してきたとおりです．Δ_1 であることが前もってわかっている函数や関係に**相対的に** Δ_1 であるような函数や関係も，また Δ_1 である，ということを主張する定理 IV.3.9 も，この目的に有効です．たとえば，関係 $|x| = |y|$ は

$$\exists s \in \mathcal{P}(x \times y)[\, s \colon x \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} y \,] \tag{✌}$$

と同値だから決定可能だと言いたいわけです．ここにある唯一の量化記号が有界だという意味では，この論理式は Δ_0 です．ただし，量化の範囲は別の変数ではなく函数 $\mathcal{P}(x \times y)$ です．この函数は，グラフが Δ_1 である（この場合は Δ_0 でもある）という意味で計算可能な二つの函数の合成になっています（補題 IV.3.3 と補題 II.17.4 参照）．補題 II.17.9 によって，関係 $s \colon x \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} y$ も Δ_1（実は Δ_0）です．

この議論を正当にするために，まず「相対的に」ということを精密に定義しなくてはなりません．

定義 IV.3.5　言語 $\mathcal{L}$ は記号 $\in$ を含み，また，その他に函数記号や関係記号を含むかもしれないものとする．このとき **$\mathcal{L}$ の Δ_0 論理式**とは，$\mathcal{L}$ の論理式のうちすべての量化記号が有界であるようなもののことだとする．正式にはそれらが II.17.4 と同じく再帰的に構成されるものとする：

（a）　原始論理式はすべて Δ_0 論理式である．

（b）　φ が Δ_0 論理式で，$x \in \mathit{VAR}$ であり，また τ が項であるとき，$\forall x \in \tau\, \varphi$ と $\exists x \in \tau\, \varphi$ は Δ_0 論理式である．

（c）　φ が Δ_0 論理式であれば $\neg\varphi$ もそうである．

（d）　φ と ψ が Δ_0 論理式であれば $\varphi \vee \psi$ も $\varphi \wedge \psi$ も $\varphi \to \psi$ も $\varphi \leftrightarrow \psi$ もそうである．

論理式 φ が Σ_1 であるとはそれが $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \psi$，ただし $k \geq 0$ で ψ は

Δ_0，という形になっていることをいう．論理式 φ が Π_1 であるとはそれが $\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k \psi$，ただし $k \geq 0$ で ψ は Δ_0，という形になっていることをいう．

そこで，先ほどの論理式 (✌) は 1 項函数記号 $\mathcal{P}$ と 2 項函数記号 $\times$ と 3 項関係記号 bij を語彙に含む言語の Δ_0 論理式ということになります．最後の bij は $bij(s, x, y)$ のように使われます．

定義 IV.3.6　言語 $\mathcal{L}$ は定義 IV.3.5 のとおりだとし，$\mathfrak{A}$ は $\mathcal{L}$ に対する構造で，$A = HF$ であり，$\in_{\mathfrak{A}}$ は HF 上の通常の所属関係であるものとする．$R \subseteq HF^n$ とするとき，R が $\mathfrak{A}$ **に相対的に** Δ_0 であるとは，$\mathcal{L}$ の Δ_0 論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を $R = \{\, \vec{a} \in A^n : \mathfrak{A} \vDash \varphi[\vec{a}] \,\}$ となるようにとれることである．

R が $\mathfrak{A}$ **に相対的に** Σ_1 であることと，$\mathfrak{A}$ **に相対的に** Π_1 であるということを，こんどは φ が Σ_1 論理式あるいは Π_1 論理式であるものとして，同様に定義する．

次に，R が $\mathfrak{A}$ **に相対的に** Δ_1 である，あるいは $\mathfrak{A}$ **に相対的に決定可能**であるということを，R が $\mathfrak{A}$ に相対的に Σ_1 であると同時に $\mathfrak{A}$ に相対的に Π_1 でもあることだとする．函数 $f\colon HF^n \to HF$ が $\mathfrak{A}$ **に相対的に計算可能**であるとは，f が HF^{n+1} の部分集合として $\mathfrak{A}$ に相対的に決定可能であることだとする．

そこで，関係 $|x| = |y|$ は $\mathcal{P}$, $\times$, bij に相対的に Δ_0 であること，すなわちこの三つを含むすべての $\mathfrak{A}$ に相対的に Δ_0 であることが，上の論理式 (✌) によって示されます．それから，あとで証明する定理 IV.3.9 を使い，$|x| = |y|$ が Δ_1 であることがわかるようになります．この定理 IV.3.9 の「Δ_0 バージョン」は偽です．$\mathcal{P}$ も $\times$ も bij も Δ_0 なのに，$|x| = |y|$ は演習問題 IV.3.33 で示すとおり Δ_0 でないのです．これについて先ほどの演習問題 IV.3.4 も参照してください．

もう一つの例： $g\colon HF \to HF$ を任意の函数として $f(x) = \{g(g(x))\}$ と定義します．このとき f は g に相対的に計算可能，すなわち，構造 $\mathfrak{A} = (HF; \in, g)$ に相対的に計算可能です．インフォーマルに計算の言葉でいえば，y を与えるごとに $g(y)$ の正しい値を明らかにしてくれる**ご神託**にお伺いを

立てられるようなコンピュータのハードウエアがあったと想像してみるのです．そのようなコンピュータは，ご神託を二回聴いて，その結果を中括弧 $\{\ \}$ に収めることで $f(x)$ を計算できます．正式には，単に $f(x) = y$ が $\mathfrak{A}$ に相対的に Δ_1 であることを確かめればよいのです．実際にはこの関係は，

$$f(x) = y \ \leftrightarrow\ g(g(x)) \in y \wedge \forall z \in y[\, z = g(g(x))\,]$$

という具合に，g を引用することが許されるなら，有界な量化だけを使って定義できるので，$\mathfrak{A}$ に相対的に Δ_0 です．

「計算可能」を，ある固定された構造 $\mathfrak{A}$ についての「$\mathfrak{A}$ に相対的に計算可能」と書き換えても，再帰理論の基本事項はどれも変更する必要なく通用します．次の補題はそのことをこれまでに証明された結果について表明しています．証明は本質的には変更されません．$\mathfrak{A}$ には必ず $A = HF$ 上の所属関係 $\in$ が含まれているので，補題 IV.3.1 で用いた $y = 1$ のような，基本的ないくつかの集合論的性質が Δ_0 であるという事実に基づく証明は，あいかわらず有効なのです．

補題 IV.3.7　これからリストする補題は「何か」を「$\mathfrak{A}$ に相対的に何か」と書き換えても，やはり有効である．ただし「何か」とは Δ_0 か Σ_1 か Π_1 か Δ_1 か「決定可能」か「計算可能」のことだとする： II.17.8, II.17.26, II.17.27, II.17.28, II.17.29, IV.3.1, IV.3.2.

定理 IV.3.9 への一つの補題として，計算可能な函数どうしのいかなる合成もまた計算可能な函数になることを証明します．先ほどの例でいえば，$f(x) = \{g(g(x))\}$ で g が計算可能であれば，f も計算可能です．ただし，函数は複数の変数をもつことがあるわけですから，あらゆる合成のなかにはひどく複雑なものもありえます．たとえば $f(x, y) = h(h(x, x, y), g(x, y), h(y, x, g(y, y)))$ というものがありえます．項という言葉を使ったほうが，精密な補題を簡単に主張できます．

補題 IV.3.8　言語 $\mathcal{L}$ と構造 $\mathfrak{A}$ は定義 IV.3.6 のとおりだとして，さらに，函数記号の $\mathfrak{A}$ におけるグラフがいずれも Δ_1 であるものと仮定する．$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を，$\mathcal{L}$ の項 σ と τ についての $\sigma = \tau$ という形の論理式とする．このとき，関係 $R = \{\, \vec{a} \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})\,\}$ は Δ_1 である．

【証明】　そうした論理式 φ の長さについての数学的帰納法を用いる．基礎になるケースとして，σ と τ がどちらも変数記号だった場合は $\mathcal{L}$ の函数がぜんぜん用いられていないのだから自明である．帰納のステップで，τ が $f(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ の形の合成された項だとすると，論理式 $\sigma = \tau$ は

$$\exists v, w_1, \cdots, w_n[\, v = f(w_1, \cdots, w_n) \wedge \sigma = v \wedge w_1 = \tau_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \tau_n\,]$$

と同値になる．$\mathfrak{A}$ の函数のグラフはみな Δ_1 なのだから，等式 $v = f(w_1, \cdots, w_n)$ は Σ_1 論理式で書けて，また $\sigma = v$ とか $w_i = \tau_i$ は帰納法の仮定により Σ_1 論理式で書ける．したがって R は Σ_1 である．そして $\sigma = \tau$ は

$$\forall v, w_1, \cdots, w_n[[\, v = f(w_1, \cdots, w_n) \wedge w_1 = \tau_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \tau_n\,] \to \sigma = v]$$

とも同値である．これは R が Π_1 であることを示している．　□

この補題の特別な場合として τ が変数記号だった場合を考えれば，Δ_1 函数のどんな合成も Δ_1 です．これは，演習問題 IV.3.4 によれば，Δ_0 については成立しません．

また別の特別な場合として，$\mathcal{L}$ が定数記号しか含まないときには，補題は Δ_0 についても成立し，そのことはすでにセクション II.17 で述べられています．そうした $\mathcal{L}$ については $\mathfrak{A}$ に相対的な Δ_0 とは太字の $\boldsymbol{\Delta}_0$ なのですが，HF において後者は Δ_0 と同じことになります．Σ_1 と Π_1 と Δ_1 についても同様です．II.17.18 と II.17.22 を見てください．ですから，計算可能な函数には好きな定数を放り込んでかまわないのです．たとえば，$f(x, y) = h(h(x, 7, y), g(x, y), h(y, x, g(\{\{2\}\}, y)))$ で g と h が計算可能函数であれば，f も計算可能になります．

定理 IV.3.9　言語 $\mathcal{L}$ と構造 $\mathfrak{A}$ は定義 IV.3.6 のとおりだとして，今度は $\mathfrak{A}$ においてすべての関係記号の解釈が Δ_1 ですべての函数記号の解釈のグラフが Δ_1 であるものとする．関係 $R \subseteq HF^n$ を固定しよう．すると

（1）R が $\mathfrak{A}$ に相対的に Σ_1 であることと R が Σ_1 であることとが同値．
（2）R が $\mathfrak{A}$ に相対的に Π_1 であることと R が Π_1 であることとが同値．
（3）R が $\mathfrak{A}$ に相対的に Δ_1 であることと R が Δ_1 であることとが同値．

【証明】　R の補集合に(1)を使うことで(2)は(1)からすぐに導かれる．また

(3) は (1) と (2) からすぐに導かれる．(1) の $\Leftarrow$ 方向も明らかなので，まずは

$$E \subseteq HF^m \text{ が } \mathfrak{A} \text{ に相対的に } \Delta_0 \text{ ならば } E \text{ は } \Delta_1 \text{ である} \tag{$*$}$$

が言えれば十分であることを示そう．(1) の $\Rightarrow$ を導くために，何か Δ_0 論理式 ψ によって $\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_k \psi$ と書ける論理式 φ によって $\mathfrak{A}$ において R が定義されていたとしよう．$(*)$ によれば，ψ によって $\mathfrak{A}$ において定義される関係は Σ_1 であり，それに k 個の存在量化を適用して得られる R もまた Σ_1 である．

ここで $(*)$ を使うさいに E が Σ_1 であることだけが必要だったことに注意しよう．しかし，帰納法による証明がうまくいくように，「E は Δ_1」と言ったのである．演習問題 IV.3.4 によれば，たとえ $\mathfrak{A}$ のすべての関係と函数が Δ_0 であったとしても，E が Δ_0 になることまでは望めない．

$(*)$ を示すために，$\mathcal{L}$ の Δ_0 論理式で定義される関係が Δ_1 であることを，論理式についての帰納法によって示す．

基礎になるケースとして ψ が原子論理式だった場合．ψ が $P(\tau_1, \cdots, \tau_k)$ という形で，P は $\mathcal{L}$ の k-項述語記号，$\tau_1, \cdots, \tau_k$ は $\mathcal{L}$ の項だとする．構造 $\mathfrak{A}$ についての仮定から $P_{\mathfrak{A}}$ は Δ_1 である．関係 $\in$ は Δ_0 であることが明らかだから，P が $\in$ である場合もここに含めてしまって差し支えない．P が $=$ である場合もこの議論は使えるけれども，これはすでに補題 IV.3.8 で済んでいる．これは，あとの議論で引用するために別に証明したのだった．論理式 ψ は

$$\exists y_1, \cdots, y_k [\, y_1 = \tau_1 \wedge \cdots \wedge y_k = \tau_k \wedge P(y_1, \cdots, y_k) \,]$$

と Σ_1 の形で書けるし，

$$\forall y_1, \cdots, y_k [\, (y_1 = \tau_1 \wedge \cdots \wedge y_k = \tau_k) \to P(y_1, \cdots, y_k) \,]$$

と Π_1 の形でも書ける．これらが本当に Σ_1 や Π_1 であることを見るには，$P_{\mathfrak{A}}$ の Σ_1 定義と Π_1 定義を用い，また補題 IV.3.8 によって $y_i = \tau_i$ が Δ_1 となることを用いる．

帰納のステップの命題演算記号の場合には，Δ_1 が命題演算子による結合のもとで閉じていることを用いればよい．帰納のステップの（有界な）$\exists$ の場合として，$\psi(\vec{x})$ が $\exists z \in \tau(\vec{x})\, \varphi(\vec{x}, z)$ であったとしよう．ここで τ は $\mathcal{L}$ の項であり，φ によって定義される関係は Δ_1 であることがすでに知られて

いるものとしよう．すると ψ は

$$\exists y[\, y = \tau(\vec{x}) \land \exists z \in y\, \varphi(\vec{x}, z)\,]$$

という Σ_1 の形で書けるし，

$$\forall y[\, y = \tau(\vec{x}) \to \exists z \in y\, \varphi(\vec{x}, z)\,]$$

という Π_1 の形でも書ける．これらが本当に Σ_1 や Π_1 であることを見るには，ふたたび補題 IV.3.8 により，Δ_1 が有界な量化のもとで閉じていること（補題 II.17.29）を用いる．

帰納のステップの $\forall$ の場合もこれと同様である．□

これでたくさんの函数や関係が Δ_1 であることを示せます．

補題 IV.3.10　計算可能な函数と決定可能な関係のいくつかを次のリストに掲げる．函数が通常 ω 上でだけ定義されている場合，自然数でない引数が一つ以上あるときには値は 0 になると定める．

（1） $|x|$.

（2） $|x| \le |y|$ と $|x| < |y|$ と $|x| = |y|$.

（3） $m + n$ と $m \cdot n$.

（4） n は素数である．

（5） $\mathrm{trcl}(x)$.

（6） $R(n)$.

【証明】　関係 $|x| = |y|$ については，定理 IV.3.9 を用いる．299 ページの式 (✌) によれば，構造 $\mathfrak{A}$ が $\mathcal{P}$ と $\times$ と 3 項関係 $s\colon x \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} y$ を含む限りにおいて，この関係 $|x| = |y|$ は $\mathfrak{A}$ に相対的に Δ_0 であるが，補題 II.17.9 によれば，$\mathcal{P}$ も $\times$ も関係 $s\colon x \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} y$ も HF 上で Δ_1 である．$|x| \le |y|$ についても同様で，$|x| < |y|$ は $(|x| \le |y|) \land \neg(|x| = |y|)$ と同値である．これで (2) は証明できた．

(1) について，函数 $x \mapsto |x|$ のグラフは Δ_1 である．なぜなら，$|x| = y$ は $|x| = |y| \land y \in \omega$ と同値であり，単項関係 $y \in \omega$ は補題 II.17.9 により HF 上で Δ_0 である．

(3) について，$m \cdot n = y$ は

$$[\, m \in \omega \land n \in \omega \land y = |m \times n|\,] \lor [\,(m \notin \omega \lor n \notin \omega) \land y = 0\,]$$

と同値であるから，(1) と補題 II.17.9 とを定理 IV.3.9 に適用すればよい．和についても同様に $m, n \in \omega$ のとき $m+n = y$ が $y = |m \times \{0\} \cup n \times \{1\}|$ と同値であることを用いる．

(4) について，n が素数であるのは $1 \in n \in \omega$ かつ $\forall y, z \in n[n \neq y \cdot z]$ のときであり，これは自然数の掛け算 $\cdot$ を函数として含む任意の構造に相対的に Δ_1 である．

(5) について，y が推移的集合であるという（Δ_0）論理式 $\mathrm{trans}(y)$ を用いると，$\mathrm{trcl}(x) = y$ は

$$\mathrm{trans}(y) \wedge x \subseteq y \wedge \forall z \in \mathcal{P}(y)[\,(\mathrm{trans}(z) \wedge x \subseteq z) \to z = y\,]$$

と同値である．この論理式は，y が x を含む最小の推移的集合であると言っている．

(6) については，$y = R(n)$ は $\langle n, y \rangle \in R{\restriction}(n+1)$ と同値なので，補題 IV.3.3 を使えばよい．□

複雑な（けれど有界な）探索を通じて求められる函数が函数 $R(n)$ に相対的に Δ_1 であることがしばしば示されることから，チャーチとチューリングの提唱がどうして真なのかが，そろそろ（インフォーマルに）わかってきます．たとえば $f(n)$ を互いに同型でない位数 n の群の総数だとしましょう．$f(n)$ を求める簡単な数式は知られていません．インフォーマルには，$n \times n$ から n への函数をすべてリストアップして，群の演算になっていないものと，すでに数え上げられたものと同型であるものを抹消していき，残ったものを数えれば，$f(n)$ を計算することができます．この議論を正式のものにするために，まず先ほどの二項演算のリストが（大きめに見積もって）$R(n+20)$ の元だったとすると，$f(n)$ を $R(n+20)$ に制限された有界量化を用いて定義できるわけです．

これよりずっと単純な，先ほどの補題の (3) の精神に則った議論で，函数 $m^n = |{}^n m|$ が計算可能とわかるのですが，わたくしたちはその代わりに，再帰的定義についての下記の一般的な補題からこのことを証明することにします．というのも，再帰的に定義されるこの他の函数も計算可能であることを証明しておく必要があるからです．たとえば $h(m, n, 1) = m^n$ であり $h(m, n, 3) = m^{m^{m^n}}$ であるようなハイパー指数函数：

$$h(m,n,0) = n\,;\quad h(m,n,j+1) = m^{h(m,n,j)} \qquad (\text{✍})$$

を考えましょう．この函数は計算可能です．しかし，たとえば $h(2,0,j) = |R(j)|$ とは言えるものの，この函数を組合せ論的に簡単に定義する方法はありません．

再帰理論の根本にある事実の一つであり，再帰理論という名の由来でもあるのが，再帰的定義はわたくしたちを計算可能な函数のクラスの中に留まらせる，ということです．集合論では，再帰の基本形は順序数全体の上の再帰です．これは HF においては自然数の上の再帰と同じことになります．たとえば，セクション I.9 で述べたように，フィボナッチ数列は

$$f(0) = f(1) = 1\,;\quad y > 1 \text{ のとき } f(y) = f(y-1) + f(y-2)$$

によって計算されます．こうした定義の一般形は $f(y) = G(f{\restriction}y)$ であり，定理 I.9.2 で示されたとおり，これは集合論においては正当な定義ですが，ここではわたくしたちはこの函数が計算可能であること，すなわちそのグラフが Δ_1 であることを示したいわけです．

定理を精密に表明する前に，自然数の上の再帰以外にも類似の再帰的定義がたくさんあることに注意しましょう．一つの例としては，演習問題 I.14.24 によって，$f(y) = G(f{\restriction}\mathrm{trcl}(y))$ という形式が，y が順序数ではなく任意の集合であるときに正当です．ZFC を展開するうえでは，この種の再帰を容易に順序数の上の再帰に帰着させることができたので，このことはとりわけ重要ということはありませんでした．これについては演習問題 I.14.24 のヒントを見てください．しかしここでは，そうやって定義された函数が計算可能ということを示す必要もあるのですから，もっと注意が必要です．また別の例として「論理式」の概念があります．y が $\mathcal{L}$ の論理式のとき $f(y) = 1$ としそれ以外のとき 0 とします．わたくしたちの再帰的定義（定義 II.5.3 参照）では，y のいろいろな部分式が論理式かどうかを知る必要があります．これらの部分式は $\mathrm{trcl}(y)$ には属さないのですが，全部で有限個しかありませんので，この f が計算可能であることを，次の定理によって示すことができます

定理 IV.3.11　$\sqsubset$ は HF 上の狭義半順序（定義 I.7.2 参照）であって，すべての $y \in HF$ に対して切片 $y{\downarrow} := \{x \in HF : x \sqsubset y\}$ が有限であるものと

する．函数 $G\colon HF^2 \to HF$ を固定しよう．すると，

（1） 函数 $F : HF \to HF$ を

$$\forall y \in HF[\,F(y) = G(y, F{\restriction}(y{\downarrow}))\,] \qquad (✒)$$

をみたすようにとれる．しかもそのような F はただ一つに定まる．

（2） G と $\downarrow$ が計算可能であれば F も計算可能である．

いくつか予備的な注意をします．インフォーマルには，(✒) は $x \sqsubset y$ であるような有限個の x についての $F(x)$ を知った上で $F(y)$ をどう再帰的に計算するかを告げています．$y{\downarrow} = \emptyset$ であれば $F(y) = G(y, \emptyset)$ なので，このような y を再帰の「基礎」と考えることができます．$\downarrow$ が HF から HF への函数になっていることに注意しましょう．$\downarrow$ が計算可能ならば，$\sqsubset$ は決定可能です．$x \sqsubset y$ が $x \in y{\downarrow}$ と同値だからです．この先の演習問題 IV.3.28 からわかるように，この逆は成立しません．

また，$x \sqsubset y$ のときは，$x{\downarrow} \subseteq y{\downarrow}$ かつ $x \in y{\downarrow} \setminus x{\downarrow}$ なので必ず $|x{\downarrow}| < |y{\downarrow}|$ となります．集合論であれば，$F(y)$ は「ω の要素 $|y{\downarrow}|$ に関する再帰によって」定義されたと言うところでしょう．ZFC におけるそうした再帰の正当性のフォーマルな保証が(1)の証明から得られます．これは論理式を扱うさいに見かける「長さに関する再帰」の正当性の保証と同様のものです．定義 II.4.1 についての 132 ページの議論を参照してください．

論理式についての再帰を使うさいに $x \sqsubset y$ を x が y の真の部分式であるという意味として使うことができます．$F(y) = G(f{\restriction}\mathrm{trcl}(y))$ という再帰の正当性の保証には，$x \sqsubset y$ とは $x \in \mathrm{trcl}(y)$ のことで，したがって $y{\downarrow} = \mathrm{trcl}(y)$ とできます．また，フィボナッチ数列のように本来 ω の上でだけ定義される函数については $x < y \in \omega$ の場合だけ $x \sqsubset y$ であるとすることができ，そうすると $y{\downarrow}$ は $y \in \omega$ のとき y でありそれ以外のとき $\emptyset$ になります．

【定理 IV.3.11 の証明】 (1)は純粋に集合論的な事実である．F の一意性は $|y{\downarrow}|$ に関する帰納法から従う．仮に F_1 と F_2 がいずれも (✒) をみたしたとすれば，$F_1(y) \neq F_2(y)$ をみたす y のうち $|y{\downarrow}|$ を最小にするものを考えると（$x \sqsubset y$ のとき $|x{\downarrow}| < |y{\downarrow}|$ であることから）矛盾が出る．F の存在については，仮に(1)をみたす $F\colon HF \to HF$ の存在を仮定したとすれば，函数

$\widehat{F}\colon \omega \to \mathcal{P}(HF)$ を $\widehat{F}(n) = F{\restriction}\{\, y \in HF : |y{\downarrow}| \le n \,\}$ によって定義できる．この $\widehat{F}$ は

$$\begin{aligned}\widehat{F}(n) = \widehat{F}{\restriction}n \cup \{\, (y,z) \in HF \times HF :\\ |y{\downarrow}| = n \land z = G(y, \widehat{F}{\restriction}n \cap (y{\downarrow} \times HF)) \,\} \qquad (*)\end{aligned}$$

という再帰をみたす．たとえば $\widehat{F}(0) = \emptyset \cup \{\, (y, G(y,\emptyset)) \in HF \times HF : y{\downarrow} = \emptyset \,\}$ であり $y{\downarrow} = \emptyset$ のとき $G(y,\emptyset) = F(y)$ である．ここで折り返して，まず (*) を $\widehat{F}$ の再帰的定義として採用し，それから $F(y)$ のことを $(y,z) \in \widehat{F}(|y{\downarrow}|)$ をみたす z のことと定義しよう．こうすると F が(1)の再帰をみたすことは容易に示される．

補題 IV.3.2 により，F のグラフが HF^2 の Σ_1 部分集合であることを示せば(2)を示すには十分である．そしてそのために定理 I.9.2 の証明から用語を借用する．$d, h \in HF$ に対して $\mathrm{App}(d,h)$ とは h が函数で $\mathrm{dom}(h) = d$ かつ $\forall y \in d[\, y{\downarrow} \subseteq d \,]$ かつ $\forall y \in d[\, h(y) = G(y, h{\restriction}(y{\downarrow})) \,]$ ということだとする．つまり，h が有限集合 d 上で定義された F の近似になっていることをいう．$|y{\downarrow}|$ に関する帰納法により $y \in d$ のとき $h(y) = F(y)$ となることに注意しよう．述語 App は $\downarrow$ と G に相対的に Δ_1 であるから，定理 IV.3.9 により Δ_1 である．$F(y) = z$ は $\exists h, d[\, \mathrm{App}(h,d) \land h(y) = z \,]$ と同値なので Σ_1 である．□

定理 IV.3.11 を応用する前に一つ準備をします．

補題 IV.3.12　ドットつき減算 $\dot{-}\colon HF^2 \to HF$ は計算可能である．ただし $i, j \in \omega$ かつ $i \ge j$ のとき $i \dot{-} j$ は $i - j$ に等しく，それ以外の場合には $i \dot{-} j = 0$ であるものとする．

【証明】　関係 $i \dot{-} j = z$ は

$$[\, z = 0 \land [\, i \in j \lor i \notin \omega \lor j \notin \omega \,]\,] \lor [\, j + z = i \land i \in \omega \land j \in \omega \land z \in \omega \,]$$

と同値であり，また足し算 $+$ のグラフが Δ_1 であることはすでに検証したとおりであるから，$i \dot{-} j = z$ も Δ_1 である．□

この函数が便利な理由は，$y \in \omega$ に対する $F(y) = G(y, F{\restriction}y)$ の形の再帰の多くにおいて，$y > 0$ のときに $F(y)$ の計算に本当に用いられるのが

$F(y-1)$ だけだ，ということがよくあるからです．$\dot{-}$ は引き算 $-$ の HF^2 上の全域函数への自然な延長であり，この場合の $G(y,s)$ は $s(y \dot{-} 1)$ を参照することになります．

補題 IV.3.13　計算可能な 1 変数函数のいくつかを次のリストに掲げる．函数が通常 ω 上でだけ定義されている場合，引数が自然数でないとき値は 0 になると定める．

（1）　$y!$.

（2）　y 番目のフィボナッチ数.

（3）　$R(y)$.

（4）　$\sum(\omega \cap y)$.

（5）　$\mathrm{rank}(y)$.

（6）　$F(\emptyset)=1$ で $y \neq \emptyset$ のとき $F(y)=\sum\{\,F(z) : z \in y\,\}+2$ で与えられる函数 $F(y)$.

【証明】　どの場合も定理 IV.3.11 を直接応用する．どの場合も G と $\downarrow$ が計算可能であることは，それらがすでに Δ_1 であると知られている概念に相対的に Δ_1 であるので容易にわかる．

(1) (2) (3) については実は ω 上の再帰であって，$\sqsubset$ は，ω 上では通常の順序であって ω 外では偽となる関係，すなわち，順序対の集合としてはちょうど $\{\,(i,j) \in \omega^2 : i<j\,\}$ である．このとき $\downarrow$ は明らかに計算可能であって，$y \in \omega$ のとき $y{\downarrow}=y$ となる．(1) (2) (3) のどの場合も，y が自然数であって s が $\mathrm{dom}(s)=y$ かつ $\mathrm{ran}(s) \subseteq \omega$ をみたす函数であるという**意味のあるケース**以外には $G(y,s)=0$ とする．

まず (1) について，階乗を普通どおりに

$$y! = \begin{cases} 1 & y=0 \text{ のとき} \\ y\cdot(y-1)! & y>0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義しよう．これを $F(y)=G(y,F{\restriction}(y{\downarrow}))$ の形にあらわすには，$G(y,s)$ の意味のあるケースには，$G(0,s)=1$ であり $y \neq 0$ なら $G(y,s)=y\cdot s(y \dot{-} 1)$ と定める．

(2) について，意味のあるケースの $y>1$ のときは $G(y,s)=s(y \dot{-} 1)+s(y \dot{-} 2)$ とし，$G(0,s)=G(1,s)=1$ とする．

(3) について，意味のあるケースには，$G(0,s)=\emptyset$ とし $y\neq 0$ のとき $G(y,s)=\mathcal{P}(s(y\dot{-}1))$ とする．本当をいえば $R(y)$ が計算可能であることは補題 IV.3.10 ですでに知っているのだが，再帰的定義の例示としてここに含めた．

(4) について，$x \sqsubset y$ を $x \subsetneq y$ と定める．すると $y{\downarrow}=\mathcal{P}(y)\setminus\{y\}$ である．もしも $F(y)=\sum(\omega\cap y)$ だったら，$\omega\cap y=\emptyset$ のときは $F(y)=0$ であり，$\omega\cap y\neq\emptyset$ のときは $F(y)=\min(\omega\cap y)+F(y\setminus\{\min(\omega\cap y)\})$ となる．これは $F(y)$ を y と $F{\restriction}(y{\downarrow})$ から Δ_1 で定義している．

(5) について，$\mathrm{rank}(y)=j$ となるのは $j\in\omega$ かつ $y\in R(j+1)$ かつ $y\notin R(j)$ のときだから，(3) を用いればこれが Δ_1 であることは明らかで，余計な再帰を使わずに (5) を導くことができる．

しかし，再帰の例示としてみた場合，(5) は $\mathrm{rank}(y)=\sup\{\,\mathrm{rank}(z)+1 : z\in y\,\}$ であって，(6) にたいへん近いことに注意しよう（補題 I.14.6 参照）．そこで (5) (6) についてはいずれも $F(y)$ を y の要素に対する F の値に基づいて計算することになる．$\in$ は推移的関係ではないので $x\sqsubset y$ を $x\in\mathrm{trcl}(y)$ と定義しよう．すると $y{\downarrow}=\mathrm{trcl}(y)$ であり，これは補題 IV.3.10 より計算可能である．そして再帰は $F(y)=G(y,F{\restriction}\mathrm{trcl}(y))$ という形になる．

(5) において，sup と $\bigcup$ が同じものであることから，$G(y,s)=\bigcup\{\,s(z)+1 : z\in y\cap\mathrm{dom}(s)\,\}$ とする．$G(\emptyset,\emptyset)=\bigcup\emptyset=0$ であるから $\mathrm{rank}(\emptyset)=0$ と間違いなく計算できている．つまり，$y=\emptyset$ を別扱いにする必要はない．G が計算可能であるのをみるために，$f\colon HF^2\to HF$ が計算可能であるとき（たとえば $z,s\mapsto s(z)+1$ など），函数 $s,d\mapsto\{\,f(z,s) : z\in d\,\}$ も計算可能であることに注意する．というのも，この函数のグラフは f に相対的に Δ_0 であるから．

(6) においては $y=\emptyset$ の場合は別扱いである．そこで $y\neq\emptyset$ のときには (4) を使って $G(y,s)=2+\sum(\omega\cap\mathrm{ran}(s{\restriction}y))$ とし，$G(\emptyset,s)=1$ とする．□

ここで，(6) の函数 $F(y)$ は，集合 y を記号 ‘{’ と ‘}’ と ‘∅’ を使って明示的に書き下した場合に用いられる記号の個数になっていることがわかります．たとえば $F(\{\emptyset\})=2+1=3$，$F(\{\{\emptyset\}\})=2+3=5$，$F(\{\{\{\emptyset\}\}\})=2+5=7$，それから $F(\{\{\emptyset\},\{\{\{\emptyset\}\}\}\})=2+3+7=12$ となります．

補題 IV.3.13 に記載した函数はすべて 1 変数函数でした．一つの変数だけ

に関する再帰で多変数の函数を定義することも多いものです．たとえば，先ほどのハイパー指数函数 $h(m,n,y)$ の定義 (✍) では，m と n を「固定されたパラメータ」として，y について再帰しました．この h を $s=(m,n,y)$ という 3 つ組に対して定義された 1 変数函数とみれば，同じ定理でたやすく処理できます．ここでは定義 I.9.3 のとおりに，長さ 3 の列 s を 3 すなわち $\{0,1,2\}$ を定義域とする函数とみなします．そこで $s_0=m$，$s_1=n$，$s_2=y$ ということになります．このとき $HF^3 \subseteq HF$ ですので，$h\colon HF^3 \to HF$ は結局 HF の部分集合上で定義された 1 変数函数というわけです．ただし，このように見方を変えたからといって $h\colon HF^3 \to HF$ が計算可能であるという言葉の意味まで変わってしまうことはない，ということは，もちろん検証しなければなりません．ここまでにわかったことを用いれば，たやすく次のことがチェックできるでしょう：

補題 IV.3.14　n を $1 \le n < \omega$ の範囲で固定し，$f\colon HF^n \to HF$ を固定しよう．1 変数函数 $\widetilde{f}\colon HF \to HF$ を $s \in HF^n$ のとき $\widetilde{f}(s)=f(s)$，とし，$s \notin HF^n$ のとき $\widetilde{f}(s)=0$ と定めよう．このとき次の 2 条件は同値である：

（１） $n+1$ 個の変数についての関係 $f(x_1,\cdots,x_n)=z$ を表現する Σ_1 論理式と Π_1 論理式が存在するという意味において f のグラフが Δ_1 であること．

（２） 2 個の変数についての関係 $\widetilde{f}(s)=z$ を表現する Σ_1 論理式と Π_1 論理式が存在するという意味において $\widetilde{f}$ のグラフが Δ_1 であること．

この補題と定理 IV.3.11 から，次の系がたやすく得られます：

系 IV.3.15　関係 $\sqsubset$ を定理 IV.3.11 のとおりとする．k を $1 \le k < \omega$ の範囲で固定し，$G\colon HF^{k+2} \to HF$ を固定しよう．$F\colon HF^{k+1} \to HF$ かつ $x_0,\cdots,x_{k-1} \in HF$ のとき $F_{\vec{x}}(y)=F(x_0,\cdots,x_{k-1},y)$ とおいて 1 変数函数 $F_{\vec{x}}\colon HF \to HF$ を定めよう．ただし，$\vec{x}$ とは $(x_0,\cdots,x_{k-1})$ という列のことだとする．すると，

（１） すべての $x_0,\cdots,x_{k-1},y \in HF$ について $F(x_0,\cdots,x_{k-1},y)=G(x_0,\cdots,x_{k-1},y,\,F_{\vec{x}}{\restriction}(y{\downarrow}))$ が成立するような函数 $F\colon HF^{k+1} \to HF$ が，ただ一つ存在する．

（２） G と $\downarrow$ が計算可能ならば，この F も計算可能である．

【証明】（1）は純粋に集合論的な事実であり，定理 IV.3.11 の（1）からただちに得られる．なにしろ定理 IV.3.11 を各 $F_{\vec{x}}$ ごとに適用できるからだ．（2）についても同じ論法で各 $F_{\vec{x}}$ が計算可能であることがわかるが，ここではより強く F が $k{+}1$ 変数函数として計算可能であることを示す必要がある．このために補題 IV.3.14 を $n = k + 1$ の場合に適用して，1 変数函数 $\widetilde{F}$ が計算可能であることを示す．ここでは定理 IV.3.11 を半順序 $\widetilde{\sqsubset}$ に適用できる．この $\widetilde{\sqsubset}$ というのは，s と t がいずれも長さ $k+1$ の列で，$s_k \sqsubset t_k$ かつ各 $i < k$ について $s_i = t_i$ となっている場合にのみ，$s \mathrel{\widetilde{\sqsubset}} t$ が真となる関係だとする．□

この系からは次の補題がたやすく得られます：

補題 IV.3.16　次の二つの多変数函数はいずれも計算可能である．ここでも，引数が一つでも自然数でないときは，値は 0 になると定める：

（1）j^y .

（2）式 (✍) で定義されるハイパー指数函数.

セクション IV.1 に見られたとおり，議論の領域である HF を ω-列 $d_0, d_1, d_2, \cdots$ の形に並べなおす計算可能な方法があることを知っておくと便利です．294 ページで Σ_1 集合は ω 上の計算可能函数によって数えあげることができることから**再帰的可算** (r.e.) あるいは**計算論的可算** (c.e.) と呼ばれる，と指摘したときに，この並べ方を利用しました．そのときはインフォーマルにコンピュータのプログラムの言葉で説明しましたが，ここでは同じことを次の補題の系としてもっと精密に言うことができます．この補題は，演習問題 I.14.14 に述べられた HF の並べ方が計算可能であることを示しています.

補題 IV.3.17　函数 $\Gamma\colon HF \to \omega$ を $\Gamma(y) = \sum\{\, 2^{\Gamma(x)} : x \in y \,\}$ によって定義し，HF 上の関係 $\lhd$ を $x \lhd y \leftrightarrow \Gamma(x) < \Gamma(y)$ によって定義しよう．すると，

（1）Γ は HF から ω への全単射である.

（2）Γ^{-1} は演習問題 I.14.14 で触れられた $(\omega; E)$ から $(HF; \in)$ の上への同型写像である.

(3) Γ もその逆函数も計算可能である.

(4) 関係 $\triangleleft$ は決定可能であり, $\triangleleft$ は HF を順序型 ω に整列順序づけする.

【証明】 (1)と(2)については演習問題 I.14.14 のヒントを参照.

(3)においては順序対の集合としての $\Gamma \subseteq HF \times \omega$ が Δ_1 であると主張している. この言明が Γ とその逆 $\Gamma^{-1} \subseteq \omega \times HF$ に対するものと同値であるのは当然である. Γ に対しては, これは補題 IV.3.13 の(5)や(6)で用いられた再帰のちょっとした変形である.

さらに, (4)は(1)と(3)から導かれる. □

系 IV.3.18 空でない集合 $S \subseteq HF$ を固定しよう. このとき S が Σ_1 であることと, $S = \{ g(n) : n \in \omega \}$ をみたす計算可能な函数 $g \colon \omega \to HF$ が存在することとは同値である.

【証明】 $\Leftarrow$ について. g のグラフが Δ_1 であって $S = \{ x : \exists n \in \omega [(n, x) \in g] \}$ であることに注意.

$\Rightarrow$ について. セクション IV.2 で示された論法を形式化する. $R \subseteq HF^2$ が Δ_1 であり, $x \in S$ は $\exists y [(x, y) \in R]$ と同値であったとする. 要素 $c \in S$ を固定して, $f = \Gamma^{-1} \colon \omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} HF$ を補題 IV.3.17 の同型写像とする. $f(n) = (a, d)$ と書けるとき, $(a, d) \in R$ であれば $g(n) = a$ とし, そうでなければ $g(n) = c$ とする. そもそも $f(n)$ が対でないときも $g(n) = c$ とする. □

同じ補題のもう一つの用例として, HF に属する集合に対する計算可能な選択函数が存在します.

演習問題 IV.3.19 $x \neq \emptyset$ であるかぎり $C(x) \in x$ となるような, 計算可能な函数 $C \colon HF \to HF$ が存在することを示しなさい.

[ヒント] 補題 IV.3.17 で与えられた並べ方に関して最初の要素を選べばよい. □

フォーマルな言語の理論では有限列が用いられます. ここで有限列に関する基本概念が Δ_1 であることを確かめましょう. 定義 I.10.3 により,

$HF^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} HF^n$，したがって $HF^{<\omega} \subseteq HF$ となっています．定義 I.10.4 によれば，$\sigma \in HF^m$ で $\tau \in HF^n$ のとき，$\sigma^\frown\tau$ または $\sigma\tau$ は両者の**連結**である $\pi \in HF^{m+n}$ をあらわします．たとえば $(3,1,4)^\frown(1,5,9,2,6,5) = (3,1,4,1,5,9,2,6,5)$ です．この $\frown$ のような演算を全域で定義された 2 変数函数とみなしたければ，これまでどおり，自然な定義域の外では値が $\emptyset$ になると考えればよいのです．そこで

定義 IV.3.20　$\sigma, \tau, i \in HF$ とする．列の連結 $\sigma^\frown\tau$ は，$\sigma \notin HF^{<\omega}$ あるいは $\tau \notin HF^{<\omega}$ のときには $\sigma^\frown\tau = \emptyset$ となるものと定める．$\sigma \in HF^{<\omega}$ のときには，$\mathrm{lh}(\sigma) = \mathrm{dom}(\sigma)$ であり，$\sigma \notin HF^{<\omega}$ のときは $\mathrm{lh}(\sigma) = \emptyset$ であるとする．$\sigma \in HF^{<\omega}$ かつ $i \in \mathrm{dom}(\sigma)$ のときは $\mathrm{eval}(\sigma, i)$ あるいは σ_i とは $\sigma(i)$ のことだとし，それ以外のときは $\mathrm{eval}(\sigma, i) = \sigma_i = \emptyset$ とする．

モデル理論においてフォーマルな言語のセマンティクスを論じたさいに，定義 II.7.7 で導入される $\sigma + (y/a)$ という記法を用いました．そこでは σ は変数記号ひとつひとつに値を割り当てる函数をあらわしていましたが，この記法自体はどんな函数 σ に対しても，y の値を a とし，もしも $y \in \mathrm{dom}(\sigma)$ ならば従来の値のことは忘れるように，σ を書きかえることで得られる函数のことだとして，意味をなします．ここではこれをさらに HF^3 上の全域で定義された演算へと拡張します：

定義 IV.3.21　任意の $\sigma, y, a \in HF$ に対して，$\mathrm{repl}(\sigma, y, a)$ とは，σ が函数であるときには $\mathrm{repl}(\sigma, y, a) = \sigma{\restriction}(\mathrm{dom}(\sigma) \setminus \{y\}) \cup \{\langle y, a\rangle\}$ であり，そうでないときは $\mathrm{repl}(\sigma, y, a) = \emptyset$ であるものとする．

補題 IV.3.22　集合 $HF^{<\omega}$ は HF の Δ_1 部分集合である．演算 $\frown$, lh, eval, repl はいずれも計算可能である．

もはやこれ以上いちいち書きたてたりしませんが，これに類似の結果はたくさんあります．たとえば，x, y, z に列 (x, y, z) を対応させる 3 変数函数のグラフは，$(x, y, z) = \sigma$ が $\sigma \in HF^{<\omega} \wedge \mathrm{lh}(\sigma) = 3 \wedge \sigma_0 = x \wedge \sigma_1 = y \wedge \sigma_2 = z$ と同値なので Δ_1 です．

これで，論理の構文と**有限**モデル上の意味が計算可能であることを確かめ

られます．このことはチャーチとチューリングの提唱によって「明らか」ではあるのですが，次の 4 つの補題に概要を示した厳密な証明のために必要な要素は，すでに準備が整っています．これらの補題の証明においては，そろそろ，さらなる詳細を読者に委ねることにします．ポーランド記法から始めましょう：

補題 IV.3.23　$(\mathcal{W}, \alpha)$ を定義 II.4.1 にいうポーランド記法の語彙とする．$\mathcal{W}$ は HF の Δ_1 部分集合であり，$\mathcal{W}$ に属する各記号にそのアリティを対応させる函数 α は計算可能であるものとする．$(\mathcal{W}, \alpha)$ のすべての整形式の集合を $\mathcal{E}$ とすれば，$\mathcal{E}$ は HF の Δ_1 部分集合である．

【証明】　再帰によって $\chi_{\mathcal{E}}$ を定義する．$\tau \sqsubset \sigma$ を，$\tau, \sigma \in HF^{<\omega}$ であって τ が σ のひと続きの真の部分列であることと定義する．$\downarrow$ が計算可能であることは，$\sigma{\downarrow} = \{\tau \in R(\mathrm{rank}(\sigma)+1) : \tau \in HF^{<\omega} \wedge \tau \neq \sigma \wedge \exists \mu, \nu \in R(\mathrm{rank}(\sigma)+1)[\sigma = \mu^\frown\tau^\frown\nu]\}$ となることからわかる．$\chi_{\mathcal{E}} \restriction (\sigma{\downarrow})$ からの $\chi_{\mathcal{E}}(\sigma)$ の定義にあらわれるこれと類似の量化も，同様にしかるべき $R(n)$ に制限されたものになる．□

論理のシンタクスが決定可能であることを確かめるには，言語 $\mathcal{L}$ の計算可能性についての同様の仮定が必要になります．論理の記号についてもこうした仮定が必要です．定義 II.5.1 では記号というものが集合としては何であるのかを指定しなかったことを思い出しましょう．

定義 IV.3.24　今後つねに，論理の記号はすべて HF に属すること，それと，変数の集合 VAR が決定可能であることを仮定する．定義 II.5.2 で定義した意味での述語論理の語彙が**決定可能**であるとは，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{F}$ と $\mathcal{P}$ が HF の決定可能部分集合であり，かつ，アリティ函数 $\{(s, n) : s \in \mathcal{F}_n\}$ と $\{(s, n) : s \in \mathcal{P}_n\}$ がともに決定可能であることだとする．これを簡単に「$\mathcal{L}$ が決定可能である」ということにする．

補題 IV.3.25　$\mathcal{L}$ が決定可能であるとする．このとき，$\mathcal{L}$ の項の集合，$\mathcal{L}$ の原子論理式の集合，$\mathcal{L}$ の論理式の集合は決定可能である．また，論理式 φ と φ に自由に出現する変数 x との対 (φ, x) の全体の集合も決定可能である．

有限な $\mathcal{L}$ は決定可能な $\mathcal{L}$ の特殊ケースと考えます．これからセマンティクス的な用語について語るときには，$\mathcal{L}$ は有限であると仮定しているものとします．そうすれば，領域 A が HF に属するかぎりいつでも $\mathfrak{A} \in HF$ となることが保証されます．$\mathcal{L}$ の各記号にしかるべきセマンティクス的実在物を対応させる函数である解釈が，$\mathfrak{A}$ によって定義 II.7.1 のとおりに定められることに注意しましょう．

補題 IV.3.26　有限な $\mathcal{L} \in HF$ を固定しよう．SAT とは，$\mathcal{L}$ に関する構造 $\mathfrak{A}$ と $\mathcal{L}$ の論理式 φ と φ の変数への A の要素の割り当て σ の組 $(\mathfrak{A}, \varphi, \sigma) \in HF$ のうち $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ となるものの集合だとする．このとき SAT は Δ_1 である．

【証明】　定義 II.7.8 の用語法で言えば $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ が計算可能であることを示そう．まずは項の値が計算可能であることを示す必要がある．定義 II.7.4 によればこれは $\mathfrak{A}$ が $\mathcal{L}$ に関する構造で α が $\mathcal{L}$ の項で σ が α の変数への A の要素の割り当てであるときには $F(\mathfrak{A}, \alpha, \sigma) = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\alpha)[\sigma]$ となり，そうでないときには $F(\mathfrak{A}, \alpha, \sigma) = \emptyset$ となるような 3 変数函数 $F \colon HF^3 \to HF$ のことである．これは $\mathfrak{A}$ と σ とを固定したパラメータにして α について再帰されるので，$(\mathfrak{A}, \alpha, \sigma){\downarrow}$ を α のすべての真の部分項 β についての組 $(\mathfrak{A}, \beta, \sigma)$ 全体のなす集合とする．

次に $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ については φ について再帰する．しかし今回は割り当て σ を固定されたパラメータとみなすわけにはいかない．たとえば φ が $\forall x \psi$ だった場合には $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ の計算にはさまざまな $a \in A$ についての $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\mathrm{repl}(\sigma, x, a)]$ を計算せねばならないからだ．ただ幸いなことに $\sqsubset$ を定義するにあたってどの割り当てが関連してくるかを完全に正確に書き出す必要はなくて，十分大きい**有限**な外側からの近似ができればよい．そこで $(\mathfrak{A}, \varphi, \sigma){\downarrow}$ は φ の真の部分論理式 ψ と $\mathrm{ran}(\tau) \subseteq A$ であって $\mathrm{dom}(\tau)$ が $\mathrm{dom}(\sigma) \cup (\mathit{VAR} \cap \mathrm{ran}(\varphi))$ の部分集合であるような函数 τ からなる組 $(\mathfrak{A}, \psi, \tau)$ 全体のなす集合とする．この集合 $\mathrm{dom}(\sigma) \cup (\mathit{VAR} \cap \mathrm{ran}(\varphi))$ は $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ の計算に関連してくる可能性がある変数記号をすべて含む．$\varphi \in HF^{<\omega}$ であることから $\mathit{VAR} \cap \mathrm{ran}(\varphi)$ がちょうど φ に出現する変数記号全体の集合になることに注意しよう．

値 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を求める再帰の「基礎になるケース」は，$(\mathfrak{A},\varphi,\sigma){\downarrow}=\emptyset$ となる場合にあらわれる．これは φ が真の部分論理式をもたない場合，すなわち原子論理式の場合であり，ここでは φ にあらわれる項の値 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\alpha)$ が用いられることになる．□

この再帰においては，$\mathfrak{A}$ は固定されたパラメータではあるものの，A が有限であることは重要で，さもないと $(\mathfrak{A},\varphi,\sigma){\downarrow}$ が有限でなくなってしまいます．実際，A が無限であった場合には，量化を含む論理式を評価するにあたって，無限の時間をかけて A の要素すべてを見て回ることになるので，無限な A に対しても $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ が計算可能なはずだと考える理由などはありません．具体的に，$\mathcal{L}=\{\in\}$ で $\mathfrak{A}=(HF;\in)$ の場合を考えましょう．定理 IV.2.2（これは次のセクションで証明します）によれば，集合 $S=\{(\varphi,\sigma) : HF\vDash\varphi[\sigma]\}$ が Δ_1 でないことは明らかです．φ として Δ_1 でない集合を定めるような Σ_1 論理式をとることができるからです．実のところ S は HF の要素に対する量化だけでは**どうしても定義できない**のです．定理 IV.5.29 を見てください．ただし，話を Δ_0 論理式に限れば，探索が有限で済むので，これに相当する概念が決定可能になります．

補題 IV.3.27　$\mathcal{L}=\{\in\}$ としよう．SAT* とは，$\mathcal{L}$ の Δ_0 論理式 φ と φ の変数への HF の要素の割り当て σ の対 $(\varphi,\sigma)\in HF$ のうち $HF\vDash\varphi[\sigma]$ となるものの集合だとする．このとき SAT* は Δ_1 である．

【証明】　まず Δ_0 論理式全体の集合が決定可能であることがわかる．また，Δ_0 文が一つも存在しないので σ は決して $\emptyset$ にならないことがわかる．

そこで $(\varphi,\sigma){\downarrow}$ を，φ の真の部分論理式 ψ と $\mathrm{dom}(\tau)\subseteq\mathrm{dom}(\sigma)\cup(\mathit{VAR}\cap\mathrm{ran}(\varphi))$ かつ $\mathrm{ran}(\tau)\subseteq\mathrm{trcl}(\mathrm{ran}(\sigma))$ をみたす函数 τ の対 (ψ,τ) の全体と定めなさい．□

対角線論法により SAT* は Δ_0 ではありえません．補題 IV.4.2 を見てください．この補題は，Δ_0 論理式の決定可能性についてセクション II.17 でインフォーマルに与えたコメントに関連しています．何か Δ_0 論理式が与えられるたびに，HF の要素に対するその式の真偽を判定するコンピュータのプログラムが書けます．実は，**1 個の**プログラムですべての Δ_0 論理式につ

いてこれを行なうのも，プログラミングの簡単な演習問題です．このプログラムに Δ_0 論理式 φ と変数記号への値の割り当て σ とを入力すると，プログラムはこの論理式 φ が割り当て σ について真であるか否かを答えてくれるわけです．本書ではプログラムを正式には扱わず，わたくしたちの「決定可能」の定義は Δ_1 であることでしたので，このプログラミング演習の代わりにここでは補題 IV.3.27 を示しました．

演習問題 IV.3.28　定理 IV.3.11 で扱ったような半順序 $\sqsubset$ と演算 $\downarrow$ で，$\sqsubset$ は決定可能であり，すべての y について $|y\downarrow| \leq 1$ であって，しかし $\downarrow$ は計算可能でない，という例を挙げなさい．

[ヒント]　Δ_1 でない Σ_1 集合 $S \subseteq HF$ を用いる．そうした集合はセクション IV.4 で与えられる．系 VI.3.18 にいう計算可能な全射 $g\colon \omega \xrightarrow{\text{onto}} S$ を固定しよう．$x \sqsubset y$ は $x = \langle 0, n\rangle$ かつ $y = \langle 1, a\rangle$ で，$a \in HF$，$n \in \omega$，かつ $g(n) = a \wedge \neg\exists m < n[\, g(m) = a]$ であるときに限って真となるような関係として定めるとよい．　□

演習問題 IV.3.29　グラフが Π_1 であるが Σ_1 ではないような函数 $f\colon HF \to HF$ の例を挙げなさい．これにより，補題 IV.3.2 での Σ_1 は Π_1 と入れ替えられないことがわかる．

[ヒント]　$S \subseteq HF$ を Σ_1 であって Π_1 でない集合とする．計算可能な全射 $g\colon \omega \xrightarrow{\text{onto}} S$ で一対一函数になっているものが存在することをまず示しなさい．それから $f = g^{-1} \cup (HF \setminus S) \times \{0\}$ とおきなさい．　□

演習問題 IV.3.30　$R \subseteq \omega^n \subseteq HF^n$ としよう．このとき R が HF 上の関係として Δ_1 であることとセクション IV.1 で触れた $(\omega; 0, S, +, \cdot, <)$ 上の関係として Δ_1 であることとは同値である．これを証明しなさい．

[ヒント]　$\Leftarrow$ については，ただ ω が HF の Δ_1 部分集合であることと $+$ と $\cdot$ のグラフが Δ_1 であることを用いればよろしい．$\Rightarrow$ を示すために，R が HF における Σ_1 関係であると仮定しよう．R が ω 上の関係として Σ_1 であることを見るには，HF 上の存在量化を ω 上の量化だけで表現しなければならない．これには演習問題 I.14.14 で明示された HF のコード化を用いなさい．まず，このコード化が ω 上 Δ_1 であることがわかる程度まで ω の理論を展開しなければならない．演習問題 II.18.12 のあとでゲーデル数について

述べたコメントも参照しなさい．　□

次の二つの演習問題はたいそう集合論的で，HF 上の「古典」再帰理論ではなく，$H(\kappa)$ のようなそれ以外のいろいろな推移的集合上の再帰理論に関するものです．

演習問題 IV.3.31　モストフスキの崩壊補題の以下のようなバージョンを証明しなさい：A が集合で，（セクション II.7 でやったように）A 上に構築した $\in$-モデルは外延性の公理をみたすものとする．このとき推移的集合 T で $(A; \in) \cong (T; \in)$ となるものが存在する．さらに，同型写像 $F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} T$ は，$\mathrm{trcl}(x) \subseteq A$ をみたす $x \in A$ については必ず $F(x) = x$ となるという性質をもつ．

これにより，$T \vDash ZFC - P$ だが $\approx$ が T に対して絶対的でないような，可算な推移的集合 T が存在することを導きなさい（240 ページの記法 II.17.12 に続く議論も参照）．

［ヒント］　まず $F(x) = \{ F(v) : v \in x \cap A \}$ と定義しなさい．これは $\in$ に関する再帰で，演習問題 I.14.24 で扱ったものです．それから $F{\restriction}A$ が A から $T := \mathrm{ran}(F{\restriction}A)$ の上への同型写像であることを証明しなさい．$F{\restriction}A$ が一対一函数であることを示すのに A における外延性の公理を用いることになる．一例として $A = \{0, 1, 2, \omega, \{\omega\}\}$ のとき $T = \{0, 1, 2, 3, \{3\}\}$ で，$F(\omega) = 3$，$F(2) = 2$ となる．

後半を導くには，下向きレーヴェンハイム-スコーレム-タルスキ定理 II.16.6 を用いて可算な $A \preccurlyeq H(\aleph_3)$ をとり，$T \cong A$ としなさい．　□

演習問題 IV.3.32　γ を ω より真に大きい極限順序数とするとき，冪集合函数 $\mathcal{P}$ は $R(\gamma)$ から $R(\gamma)$ への函数である．この函数が $R(\gamma)$ 上で $\boldsymbol{\Delta}_1$ でないことを証明しなさい．また，関係 $|x| = |y|$ も $R(\gamma)$ 上で $\boldsymbol{\Delta}_1$ でないことを証明しなさい．

［ヒント］　太字に注意すること．$\mathcal{P}$ のグラフが $\boldsymbol{\Sigma}_1$ でありえないことを証明しようとしているのだから，Σ_1 論理式 $\varphi(x, y)$ はある有限個の固定された $R(\gamma)$ の要素への言及を含みうる．もしも $\varphi(R(\alpha), \mathcal{P}(R(\alpha)))$ が真であるなら，$R(\alpha) \cup \{R(\alpha)\} \subseteq A \preccurlyeq R(\gamma)$ かつ $|A| = |R(\alpha)|$ となるような A をとる．

それから演習問題 IV.3.31 を用いて $\varphi(R(\alpha), b)$ と $|b| = |R(\alpha)|$ をみたす $b \in R(\gamma)$ を得る．　□

　このことから正則基数 $\kappa > \omega$ に対する $H(\kappa)$ 上での再帰理論が HF 上での再帰理論とまるで同じというわけにはいかないことがわかります．$H(\kappa)$ は κ が強到達不能基数でない限り冪集合函数 $\mathcal{P}$ のもとで閉じてさえいません．演習問題 I.14.22 からわかるとおり，κ が強到達不能基数であれば $H(\kappa) = R(\kappa)$ ですが，その場合も，冪集合函数や関係 $|x| = |y|$ は $\boldsymbol{\Delta}_1$ になりません．ところが HF 上ではこれらはいずれも Δ_1 なのです．奇妙なことに，HF 上では冪集合演算は Δ_0 ですらあります（補題 IV.3.3）．もう一つ奇妙なことに，$|x| = |y|$ のほうは Δ_0 でないのです：

演習問題 IV.3.33　関係 $|x| = |y|$ が HF 上で Δ_0 でないことを証明しなさい．

［ヒント］　$|x| = |y|$ が Δ_0 論理式 $\varphi(x, y)$ で定義できたと仮定しなさい．すると，$n \in \omega$ に対して n が偶数であることと $\exists k \in n\, \varphi(k, n \setminus k)$ が同値になるが，$\varphi(k, n \setminus k)$ は Δ_0 論理式と同値である．　□

　このセクションを，チャーチとチューリングの提唱をめぐるインフォーマルな議論で締めくくりましょう．この提唱は数学的な言明ではないので，数学的に証明されることは決してないというのは，セクション IV.2 で明言したとおりです．また，この提唱が純機械論的な実在観を支持するにせよそれに反対するにせよ，そうした哲学的主張をなんら含むものではないということも，そのときに指摘しました．インフォーマルな「アルゴリズム」の概念は純機械論的であり，チャーチとチューリングの提唱は，このインフォーマルな概念は「HF 上で Δ_1」という定義によって正確にとらえられている，と主張しているだけです．

　そこでインフォーマルな議論として，いま $R \subseteq HF$ がインフォーマルな意味で決定可能である，すなわち，$x \in HF$ が与えられれば $x \in R$ かどうかを判定できる精密に定義された手順があると仮定しましょう．この手順を実行するのは，とても手間と時間のかかるプロセスかもしれませんが，おそらく，計算手続きがきちんと定義されている限り，A は $\{0, 1\}$ すなわち $\{$ノー，イエス$\}$ の要素であり，C はすべてのステップを詳細に書きだした

精確な計算プロセスの記録であり，その計算の最終結果は A である，と主張する述語 $S(x,A,C)$ を**とても単純なやり方で**指定できるでしょう．だとしたら，初等数論や組合せ論やフォーマルな言語の理論のいろいろな概念がどれも Δ_1 であることを示したわたくしたちの方法によれば，**おそらくこの** S も Δ_1 であることでしょう．すると，$x \in R \leftrightarrow \exists C\, S(x,C,1)$ であり $x \notin R \leftrightarrow \exists C\, S(x,C,0)$ であるので，R もその補集合も Σ_1 であり，R は Δ_1 ということになります．

IV.4　対角線論法

これから，Π_1 でない Σ_1 集合 $E \subseteq HF$ を作って定理 IV.2.2 を証明することにします．この証明は $|\mathcal{P}(X)| > |X|$（定理 I.11.9）のカントールによる証明を手直ししたものです．カントールの定理はわたくしたちの展開してきた抽象的な集合論の一部でしたが，彼が用いた基本的な対角線論法はきわめて構成的なものです．集合 X の要素を添字とした X の部分集合のリストが与えられれば，対角線論法（補題 I.11.8）はこのリストに載っていない X の部分集合を明示的に定義します．次の補題の(1)はこの論法の $X = HF$ の場合を言い直すものです．

補題 IV.4.1　関係 $R \subseteq HF^2$ に対して $R_c = \{ a \in HF : (c,a) \in R \}$ としよう．そして $\mathbb{D} = \{ x \in HF : x \notin R_x \} = \{ x \in HF : (x,x) \notin R \}$ と定めよう．すると：

（1）　どの $c \in HF$ についても $\mathbb{D} \neq R_c$ となる．

（2）　R が Σ_1 であるとき，$HF \setminus \mathbb{D}$ も Σ_1 であり，各 R_c も Σ_1 である．

【証明】　(1)について：もしもある $c \in HF$ に対して $\mathbb{D} = R_c$ となるなら，$\mathbb{D}$ の定義で $x = c$ とすれば $c \in \mathbb{D} \leftrightarrow c \notin R_c$ すなわち $c \in \mathbb{D} \leftrightarrow c \notin \mathbb{D}$ となって矛盾する．

(2)について：$HF \setminus \mathbb{D} = \{ x \in HF : (x,x) \in R \}$ であることに注意しよう．$\psi(x,y)$ が R を定める 2 変数の Σ_1 論理式だとすれば，$\psi(x,x)$ は $HF \setminus \mathbb{D}$ を定める 1 変数の Σ_1 論理式であり，また，各 c について論理式 $\psi(c,x)$ は R_c を定める．補題 II.17.22 により，$\psi(c,x)$ は Σ_1 論理式である．□

ここで $E = HF \setminus \mathbb{D}$ とおきましょう．HF の**すべての** Σ_1 部分集合が，な

んらかの $c \in HF$ について R_c の形で得られるような単一の Σ_1 集合 R が得られたと<u>仮定</u>しましょう．このような R は**普遍** Σ_1 集合と呼ばれます．このとき(1)によれば $\mathbb{D}$ は Σ_1 でなく，したがって E は Π_1 でなく，いっぽう(2)によって E は Σ_1 ではあるので，定理 IV.2.2 が証明できたことになります．同じ対角線論法から，普遍 Δ_0 集合や普遍 Δ_1 集合がありえないことがわかります：

補題 IV.4.2　$n \geq 1$ とし，$R \subseteq HF^{n+1}$ は Δ_0 集合であるものとする．各 $c \in HF$ に対し，$R_c = \{\vec{a} \in HF^n : (c, \vec{a}) \in R\}$ と定めよう．このとき，

（１）　どの R_c とも異なる Δ_0 集合 $\mathbb{D} \subseteq HF^n$ が存在する．

（２）　各 R_c は Δ_0 集合である．

また，ここでの「Δ_0」を全部「Δ_1」に置き換えてもまったく同じ結果が成立する．

【証明】　(2)については補題 IV.4.1 の(2)とまったく同様である．

(1)について：ひとまず $n = 1$，したがって $R \subseteq HF^2$ と仮定する．$\mathbb{D} = \{x \in HF : x \notin R_x\}$ とする．すると，Δ_0 集合の補集合がまた Δ_0 集合になることにより，$\mathbb{D}$ が Δ_0 であることが補題 IV.4.1 の証明と同じようにしてわかり，また，どの c についても $\mathbb{D} \neq R_c$ とわかる．$n > 1$ の場合は $\mathbb{D} = \{(x, \cdots, x) \in HF^n : (x, \cdots, x) \notin R_x\}$ とすればよい．

まったく同じ証明が Δ_1 でも通用する．□

さて，HF^n のすべての Δ_0 部分集合がある c についての A_c の形で得られるような Δ_1 集合 $A \subseteq HF^{n+1}$ が存在します．補題 IV.3.27 をよく読めばそのような集合をたやすく見いだせます．これに存在量化を加えることで，普遍 Σ_1 集合が得られ，定理 IV.2.2 が証明できます．普遍 Σ_1 集合は，矛盾を含むものではありません．定理 IV.2.2 から明らかなとおり，Σ_1 集合の補集合は一般には Σ_1 集合とは限らないので，補題 IV.4.2 の証明の論法は，ここでは適用されないのです．

補題 IV.4.3　各正整数 n ごとに，普遍 Σ_1 集合 $R \subseteq HF^{n+1}$ が存在する．すなわち，R は Σ_1 であり，HF^n の Σ_1 部分集合はすべてある c について の R_c に等しい．

【証明】 補題 IV.3.27 の $\varDelta_1$ 集合 $\mathrm{SAT}^* \subseteq HF^2$ から始める．ここでは $\mathcal{L} = \{\in\}$ であって，SAT^* は $\varDelta_0$ 論理式 φ とその変数への値の割り当て σ の対 $(\varphi, \sigma) \in HF^2$ のうち $HF \vDash \varphi[\sigma]$ となるもの全体の集合である．変数記号 $v_0, \cdots, v_n$ を固定して集合 $A = \{\,(\varphi, a_0, \cdots, a_n) : \varphi$ は $\varDelta_0$ で $HF \vDash \varphi[a_0, \cdots, a_n]\,\} \subseteq HF^{n+2}$ とおく．すなわち，φ が $\varDelta_0$ 論理式でその自由変数は $v_0, \cdots, v_n$ の他にはなく，しかも $(\varphi, \{(v_0, a_0), \cdots, (v_n, a_n)\}) \in \mathrm{SAT}^*$ である，という場合に限り $(\varphi, \vec{a}) \in A$ とする．もしも φ が $\varDelta_0$ 論理式でないか $v_0, \cdots, v_n$ 以外の自由変数をもつ場合には $A_\varphi = \emptyset$ ということになる．

このとき A は $\varDelta_1$ で，各 A_c は $\varDelta_0$ であり，また HF^{n+1} のすべての $\varDelta_0$ 部分集合がある c について A_c に等しい．$R = \{\,(c, a_0, \cdots, a_{n-1}) \in HF^{n+1} : \exists a_n[\,(c, a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n) \in A]\}$ とおこう．すると R は $\varSigma_1$ である．補題 II.17.28 によって，HF^n のすべての $\varSigma_1$ 部分集合はある c について R_c の形となる．□

【定理 IV.2.2 の証明】 補題 IV.4.1 のあとに記したとおり，これは補題 IV.4.3 の $n = 1$ の場合から導かれる．□

同様の対角線論法が，計算可能函数を数え上げようとしたときにも関わってきます．$|HF| = \aleph_0$ であり，HF から HF への計算可能函数も $\aleph_0$ ありますから，いま 2 変数函数 $F\colon HF^2 \to HF$ に対して，1 変数函数 $y \mapsto F(x, y)$ のことを F_x と書けば，$\{\,F_x : x \in HF\,\}$ がちょうど HF から HF への計算可能函数の全体となるような 2 変数函数 $F\colon HF^2 \to HF$ が存在するはずです．そのような F は計算可能ではありえません．もし計算可能だったら，$g(x) = \{F(x, x)\}$ と定めた函数 g についてある c で $g = F_c$ となり，$\{F(c, c)\} = g(c) = F(c, c)$ となって矛盾します．

しかしながら，**部分計算可能函数**による部分計算可能函数全体の数え上げは存在します．ここで，

定義 IV.4.4　n 変数の**部分計算可能函数**とは，$\mathrm{dom}(f) \subseteq HF^n$，$\mathrm{ran}(f) \subseteq HF$ で，グラフが HF^{n+1} の $\varSigma_1$ 部分集合になるような函数 f のことである．

もしも $\mathrm{dom}(f) = HF^n$ だったら，f が部分計算可能函数であることと計算可能函数であることとは同値になります（補題 IV.3.2 参照）．$\mathrm{dom}(f) \subsetneq HF^n$

で，dom(f) がたまたま HF^n の $\varDelta_1$ 部分集合であった場合には，dom(f) に属さない入力には 0 を返すことによって，f を計算可能（全域）函数へと拡張できます．$E \subseteq HF$ が $\varDelta_1$ でない $\varSigma_1$ 集合のとき，$E \times \{1\}$ は 1 変数の部分計算可能函数であって，そのグラフは $\varDelta_1$ ではありません．この $E \times \{1\}$ が全域計算可能函数（つまり定数函数）へと拡張できるのはわかりきったことですが，すべての部分計算可能函数がそのように拡張できるわけではありません．これに関する反例（演習問題 IV.4.8）と，数え上げの記述（定理 IV.4.9）を与える前に，いくつかの準備をします．

インフォーマルには，部分計算可能函数とは，いつも停止するとは限らないコンピュータのプログラムが計算する函数です．n-組 $\vec{x}$ を入力したとして，コンピュータが y を出力して停止したなら，$f(\vec{x}) = y$ です．もしもコンピュータが永久に停止しないなら，$\vec{x} \notin \mathrm{dom}(f)$ です．

補題 IV.4.5　関係 $\lhd$ は補題 IV.3.17 の文中で記述された HF の順序型 ω の整列順序だとする：すなわち $x \lhd y$ は $\varGamma(x) < \varGamma(y)$ と同値だとする．$\psi(x)$ を HF の要素 x の任意の性質だとするとき，$\mu x\, \psi(x)$ とは $\psi(x)$ をみたす $\lhd$-最小の $x \in HF$ をあらわすものとする．これは $\exists x \in HF\, \psi(x)$ でない場合には未定義とする．

ギリシャ文字ミューによって最小（minimum）の x をあらわすこの記法は，他の整列順序についてもしばしば用いられます．ここで，演習問題 IV.3.19 の精神に近い，選択公理の「実効的」バージョンが得られます：

補題 IV.4.6　$S \subseteq HF^{n+1}$ に対し $F(\vec{x}) = \mu y\, S(x_1, \cdots, x_n, y)$ と定めるとき，$F \subseteq S$ であり，F は函数であり，$\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(S)$ である．さらに S が $\varDelta_1$ であれば，F は部分計算可能函数である．

【証明】　ほとんどすべて，集合論の初歩で明らかである．F が部分計算可能であることを知るには，$(\vec{x}, y) \in F$ が

$$(\vec{x}, y) \in S \wedge \forall z \lhd y [\neg S(\vec{x}, z)]$$

と同値であることに注意しよう．これが $\varSigma_1$ であることは，$\forall z \lhd y [\neg S(\vec{x}, z)]$ の部分が $\forall z \in R(\mathrm{rank}(y) + 1)[z \lhd y \to \neg S(\vec{x}, z)]$ と有界量化に書きかえられることによる．□

この F は集合 $\{\, y : S(\vec{x}, y) \,\}$ から要素 $F(\vec{x})$ を選ぶ函数というわけです．ここで S が単に Σ_1 であっただけでは，F が Σ_1 であると主張するわけにはいきません．たとえば $n = 1$ とし，Σ_1 であって Δ_1 でない集合 E について $S = E \times \{1\} \cup HF \times \{7\}$ とおきましょう．すると，$1 \lhd 7$ であることから，$F = E \times \{1\} \cup (HF \setminus E) \times \{7\}$ となりますが，これは Σ_1 ではありません．$HF \setminus E$ が Σ_1 でないからです．それでも，F の定義を修正して Σ_1 選択函数を得ることはできます：

補題 IV.4.7　$S \subseteq HF^{n+1}$ が Σ_1 集合のとき，n 変数の部分計算可能函数 F で $F \subseteq S$ かつ $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(S)$ であるものが存在する．

【証明】　なにかある Δ_1 関係 A について $S(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists z\, A(\vec{x}, y, z)$ だったとしよう．$F(\vec{x}) = (\mu p\, A(\vec{x}, p_0, p_1))_0$ とおく．すると，補題 IV.4.6 の証明と同様に，F は Σ_1 である．ここでは定義 IV.3.20 の記法にもとづき，列 (p_0, p_1) を p であらわしている．すなわち，ここでは $F(\vec{x})$ を計算するにあたって $A(\vec{x}, p_0, p_1)$ をみたす $\lhd$-最小の対 p を見つけて，その最初の座標 p_0 を返している．□

演習問題 IV.4.8　計算可能な全域函数に拡張できない 1 変数部分計算可能函数を見つけること．

[ヒント]　Σ_1 であって Δ_1 でない集合 $E \subseteq HF$ をとり，$E(x) \leftrightarrow \exists y\, A(x, y)$ となる Δ_1 関係 A を考える．$F(x) = \mu y\, A(x, y)$ とおきなさい．□

さてそれでは，すべての部分計算可能函数の部分計算可能な数え上げを得るために，補題 IV.4.7 を普遍 Σ_1 集合に適用します：

定理 IV.4.9　各正整数 n ごとに，$n+1$ 変数の次のような部分計算可能函数 F が存在する：n 変数函数 $\vec{x} \mapsto F(e, \vec{x})$ を F_e と書いたとすると，$\{\, F_e : e \in HF \,\}$ が n 変数の部分計算可能函数の全体と正確に一致する．

【証明】　補題 IV.4.3 をもちいて $S \subseteq HF^{n+2}$ を，Σ_1 関係であり，HF^{n+1} のすべての Σ_1 部分集合がある e についての $S_e := \{\, (\vec{x}, y) : (e, \vec{x}, y) \in S \,\}$ の形で得られるという意味で，普遍 Σ_1 関係であるようにとる（この証明においては $\vec{x}$ はいつでも n-組をあらわすものとする）．補題 IV.4.7 により，$n+1$ 変数の部分計算可能函数である Σ_1 部分集合 $F \subseteq S$ を $\mathrm{dom}(F) =$

$\mathrm{dom}(S) \subseteq HF^{n+1}$ となるようにとれる．このとき F_e はいずれも n 変数部分計算可能函数である．逆に g を任意の n 変数部分計算可能函数としよう．すると g は HF^{n+1} の Σ_1 部分集合であるから，ある e について $g = S_e$ である．S_e がすでに部分函数であり $\mathrm{dom}(F_e) = \mathrm{dom}(S_e) \subseteq HF^n$ であることから $F_e = S_e = g$ となる．□

この証明での補題 IV.4.3 と補題 IV.4.7 の使われ方を詳細にたどっていけば

$$F_e(\vec{x}) = U(\mu C\, T(e, \vec{x}, C))$$

という形の式を書くことができます．仮に $S(e, \vec{x}, y) \leftrightarrow \exists z\, A(e, \vec{x}, y, z)$ で，A は Δ_1 であったとしましょう．このとき $T(e, \vec{x}, C)$ は $A(e, \vec{x}, C_0, C_1)$ であり $U(C) = C_0$ ということになります．定理 IV.4.9 をこの形で書きあらわしたものは，**クリーネ標準形定理**として知られており，T は**クリーネの T 述語**と呼ばれています．このことに触れた理由は，この定理が再帰理論の**すべての**アプローチに自然に現われるからです．次にこのことについて，$n = 1$ の場合に（インフォーマルに）説明しましょう：

計算の手順のリスト e で記述された計算可能函数 $f\colon HF \to HF$ を考えましょう．その手順はなにか標準的なプログラミング言語で書かれているかもしれませんが，あるいは人が読んで実行できる手順として書かれているかもしれません．ここで，こうした手順に従っておこなった計算の過程が正しいかどうかの定義が明確で決定可能であると仮定しましょう．すなわち，$T(e, x, C)$ が，手順 e に従って入力値 x にもとづいて行われた正しい計算の過程が C であるという意味になるような，決定可能な 3 変数の述語 $T \subseteq HF^3$ があるものとします．さらに，計算の過程 C によって計算された値を**結論** $U(C)$ として取り出す，計算可能な結論函数 $U\colon HF \to HF$ があるものとします．コンピュータのプログラムの場合であれば，C はコンピュータが実行した計算のすべてのステップの系列をコード化するものであり，$U(C)$ はその系列の最終のステップで返される値ということになるでしょう．e が人に対する指示の集まりであったなら，C はその人が紙の上に残す走り書きをコード化したものかもしれません．そうした走り書きが正しいものかどうかを（T 述語によって）客観的に判定できるとして，C で計算

された結果を $U(C)$ が教えてくれるものとします．ひょっとして，計算結果にはマル印をつけるようにという指示があったとしたら，$U(C)$ はそのマル印のついた値というわけです．この段落で言ったことが，セクション IV.3 のおしまいに述べたチャーチとチューリングの提唱のインフォーマルな正当性の議論に酷似していることに注意してください．

わたくしたちが与えた，SAT* 述語と補題 IV.4.3 によるこの定理の正式な証明では，「手順のリスト」とはなんらかの $\varDelta_0$ 論理式 e であり，これが集合 $A_e \subseteq HF^3$ を定めます．入力として x が与えられたとしたら，ここでの計算とは $(x, b, d) \in A_e$ をみたす対 (b, d) の探索と考えられます．このとき b が計算の結果として返されます．したがってフォーマルには，C とは単に対 (b, d) のこと，$U(C)$ とはこの b のことだったわけです．

次の補題は補題 IV.4.7 のさらなる応用です．

補題 IV.4.10（$\varSigma_1$ 削減補題）　A と B を HF の $\varSigma_1$ 部分集合とする．このとき，$\varSigma_1$ 集合 $\widehat{A} \subseteq A$ と $\widehat{B} \subseteq B$ を $\widehat{A} \cup \widehat{B} = A \cup B$ かつ $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \emptyset$ となるようにとれる．

【証明】　$S = A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \subseteq HF \times 2 \subseteq HF \times HF$ とおく．すると S は $\varSigma_1$ である．補題 IV.4.7 を適用して，部分計算可能函数 F を $F \subseteq S$ かつ $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(S) = A \cup B$ となるようにとる．それから $\widehat{A} = F^{-1}\{0\}$，$\widehat{B} = F^{-1}\{1\}$ とおく．　□

補題 IV.4.11（$\varPi_1$ 分離補題）　P と Q を HF の $\varPi_1$ 部分集合とし，$P \cap Q = \emptyset$ と仮定する．このとき，$\varDelta_1$ 集合 $C \subseteq HF$ を $P \subseteq C$ かつ $C \cap Q = \emptyset$ となるようにとれる．

【証明】　$A = HF \setminus P$，$B = HF \setminus Q$ とおいて補題 IV.4.10 のような $\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ を得たとすれば，$\widehat{A}$ と $\widehat{B}$ はともに $\varSigma_1$ で，互いの補集合になっているから $\varDelta_1$ である．$C = \widehat{B}$ とおく．　□

この二つの補題を双対を考えて，$\varPi_1$ 削減補題を主張したいところです．それがあれば $\varSigma_1$ 分離補題もただちに得られることになります．しかし，後者は成立しません．

定理 IV.4.12（$\varSigma_1$ 分離の不成立）　HF の互いに交わらない二つの $\varSigma_1$ 部分

集合 A と B で，いかなる Δ_1 集合 $C \subseteq HF$ についても $A \subseteq C$ かつ $C \cap B = \emptyset$ とはならないようなものが，存在する．

【証明】 これも対角線論法．補題 IV.4.9 の $n = 1$ の場合の F を考える．すなわち，F は 2 変数の部分計算可能函数であって，1 変数の部分計算可能函数はすべてある $e \in HF$ についての F_e の形で得られるものとする．$A = \{ e \in HF : (e,e) \in \mathrm{dom}(F) \wedge F(e,e) = 0 \}$ とし，$B = \{ e \in HF : (e,e) \in \mathrm{dom}(F) \wedge F(e,e) = 1 \}$ としよう．すると A と B は Σ_1 で，互いに交わらない．いま，Δ_1 集合 C で $A \subseteq C$ かつ $C \cap B = \emptyset$ となるものがあったとしよう．すると，$\chi_C \colon HF \to \{0,1\}$ は部分計算可能（全域）函数であるから，$\chi_C = F_e$ をみたす e がとれる．このとき $F(e,e) = \chi_C(e)$ で，これは 0 または 1 である．ところが $F(e,e) = 0 \to e \in A \to e \in C \to F(e,e) = 1$ かつ $F(e,e) = 1 \to e \in B \to e \notin C \to F(e,e) = 0$ であって，どちらの場合も矛盾に至る．□

歴史的にみると，分離と削減の問題は，位相空間論の初歩における類似の結果から生まれたもので，そのさい Σ_1 が開集合，Π_1 が閉集合，Δ_1 が開閉集合（開集合であり閉集合でもあるもの）に類比され，さらに計算可能性が連続性に類比されています．たとえば，距離空間は**正規**空間なので，互いに交わらない二つの閉集合は互いに交わらない開集合によって分離されます．この距離空間がさらに零次元空間であったならば，開閉集合による分離が可能です．具体的に言えば

演習問題 IV.4.13 X をカントール集合としよう．ここでの位相に関する用語は，すべて X 上の相対位相についてのものとする．

（1） 開集合について次の削減補題を証明しなさい：$U, V \subseteq X$ を開集合とするとき，$\widehat{U} \subseteq U$，$\widehat{V} \subseteq V$，$\widehat{U} \cup \widehat{V} = U \cup V$，$\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$ となる開集合 $\widehat{U}$ と $\widehat{V}$ が存在する．

（2） 閉集合についての次の分離補題を(1)から導出しなさい：$H, K \subseteq X$ が閉集合で $H \cap K = \emptyset$ であるとき，$H \subseteq C$，$C \cap K = \emptyset$ をみたす開閉集合 $C \subseteq X$ が存在する．

（3） 開集合についての分離補題が成立しないことを意味する次の補題を示しなさい：互いに交わらない開集合 $U, V \subseteq X$ を，どんな開閉集合 $C \subseteq$

X についても $U \subseteq C$ と $C \cap V = \emptyset$ の両方が成立することがないようにとれる．

（4） $S \subseteq X \times X$ が開集合のとき，次のような部分集合 $F \subseteq S$ がとれることを示しなさい：F は函数のグラフになっていて，$\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(S)$ であり，しかも F は $\mathrm{dom}(F)$ 上連続である．

[ヒント] (3) については U と V の閉包が空でない交わりをもつようにすればよい．(1) について：K_n $(n \in \omega)$ は和集合が $U \cup V$ になるような開閉集合の列で，どの K_n も，U または V のどちらか一方（両方でもよい）に含まれるものだとする．ここで K_1 を $K_1 \setminus K_0$ で置き換え，K_2 を $K_2 \setminus (K_0 \cup K_1)$ で置き換える，などとすれば，K_n どうしは互いに交わらないと仮定しても一般性が損なわれない．これらの K_n を使って $\widehat{U}$ と $\widehat{V}$ を構成すること．□

この (4) が「実効的な AC」補題 IV.4.7 の位相空間バージョンになっていることに注意しましょう．部分計算可能函数の場合と同様，ここでも F が X 全域に連続函数として拡張されると主張するわけにはいきません．たとえば，F が曲線 $\sin(1/x)$ のような形をどうしても取らざるを得ないように，開集合 S を選ぶこともできるからです．

この演習問題は再帰理論に先駆けて研究されていた**記述集合論**の始まりの部分です．たとえば削減補題は F_σ と $G_{\delta\sigma}$ でも成立し，したがって分離補題は G_δ と $F_{\sigma\delta}$ について成立します．けれども，F_σ や $G_{\delta\sigma}$ について分離補題は成立しません．詳しくはモシュコヴァキスの教科書 [51] やケックリスの教科書 [38] を見なさい．

これとは違った方向にも進んでみましょう．

演習問題 IV.4.14　実数 $r \in \mathbb{R}$ の 10 進数展開の数字の列が計算可能であるときに，この実数は**計算可能**であるということにしよう．計算可能実数全体の集合を J とする．J が $\mathbb{R}$ の部分体であることと，$x \in J$ なら $\sin x \in J$ かつ $e^x \in J$ であることを証明しなさい．さらに，実数 $y \in \mathbb{R}$ が J の要素を係数とする多項式の根であるならば $y \in J$ である，ということを証明しなさい．

[ヒント] 用語について．r をたとえば $-823.183725\cdots$ というように無限

10 進数で書いた場合，この無限表示の計算可能性は小数点以下の数字のなす ω-列の計算可能性で決まるものとする．また，ここで 10 進ということに特別な理由はない．実数 r が小数展開の一つの基について計算可能であれば他のすべての基についても計算可能となることを示せる．

すべての有理数は計算可能実数である．たとえば $-123/99$ であれば 10 進数展開は $-1.2424242424\cdots$ であり，数列 $2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \cdots$ は計算可能である．いくつかの有理数は 2 とおりの 10 進数展開ができるが，どちらも計算可能になるので問題ない．たとえば $1/10 = 0.100000\cdots = 0.099999\cdots$ となっている．計算可能実数が $\aleph_0$ 個しか存在しないことは明らか．

二つの計算可能実数 x と y の和 $x+y$ も計算可能であることを示すにあたっては，場合分けをしなければならない．$x+y$ が有理数の場合は話は明らかなので，$x+y$ が無理数の場合だけを考える．たとえば x と y それぞれを 6 桁づつ計算し終えて $x = 0.163425\cdots$ および $y = 0.136574\cdots$ となっていたとする．この時点では $0.299999 \le x+y \le 0.300001$ ということがわかっている．いま $x+y$ の小数点下 1 位の数字を d とすると，d が 2 なのか 3 なのか，まだわかっていない．x と y をそれぞれ 60 桁計算したとしても，まだわからないかもしれない．それでも，$x+y$ は有理数ではないとしているので，$x+y \ne 0.3$ であることはわかっており，このまま計算を続けていけばいずれは d が 2 か 3 かは確定する．そうなったら，次は $x+y$ の小数点下 2 位の数字の計算に移れる．以下同様である．□

わたくしたちの取り組んでいる再帰理論は基本的に有限主義的に見えるのですが，理論のいくつかの側面において非構成的な要素を含んでもいます．有限主義者は上のヒントにおける「$x+y$ は有理数であるか，あるいは $x+y$ は無理数である」という排中律の使用を買ってくれないことでしょう．この非構成的側面を数学的に言いあらわす一つの方法は，和の数字は**一様**に計算可能ではない，ということです．これについて，たとえば：

演習問題 IV.4.15　函数 $f\colon \omega\times\omega \to \{5,6\}$ に対して実数の ω-列 $\langle r_j^f : j<\omega\rangle$ を，$r_j^f = \sum_{n\in\omega} 10^{-n-2} f(j,n)$ によって定めよう．そこで，$5/90 = 0.0555\cdots \le r_j^f \le 0.0666\cdots = 6/90$ となっている．$3/90 + r_j^f$ の 10 進展

開の小数点下 1 位の数字を d_j^f としよう．したがって，d_j^f は 0 か 1 である．それでは，f が計算可能なのに対応 $j \mapsto d_j^f$ が計算可能でないような，そういう f を見つけなさい．

［ヒント］ Σ_1 だが Δ_1 でない集合 $S \subseteq \omega$ をとり，$\exists n\, f(j,n) = 5$ が $j \in S$ と同値になるような f を作りなさい． □

クリーネの第一および第二再帰定理は，どちらも再帰理論における重要な結果です．第一の結果についてここで**インフォーマル**に論じます．第二の結果はゲーデルの第二不完全性定理（定理 IV.5.32）に関連しており，演習問題 IV.5.35 においてこれを正確に述べることにします．カットランドの教科書 [19] が両者を詳細に論じて比較しています．クリーネの文献 [40] では，第一および第二再帰定理はそれぞれ定理 XXVI と定理 XXVII です．

第一再帰定理はコンピュータのプログラミングにおいては**いかなる**再帰でも正当と認められるという観測を定式化するものです．つまり，通常のプログラミング言語において $f(x)$ を計算するプログラムは函数 f 自身をどんな風に使って呼び出してもかまわないのです．ただ，プログラムがつねに停止するという保証がないだけです．第一再帰定理はこうした方法で定義された函数が（一般には全域函数にならないが）**部分**計算可能函数になると表明しています．本書では，得られる函数が全域で定義されていることを保証したかったので，再帰はすべてなんらかの整礎的関係（定理 I.9.2 では順序数の $<$，定理 IV.3.11 では $\sqsubset$）の上でなされました．しかしそのことは，ここでは関係ありません．

そうした再帰を実際に用いるときは，たいてい，f を評価するさいにコンピュータが何をするかを分析することで，函数 f が部分計算可能函数であること（グラフが Σ_1 であること）を，フォーマルな再帰定理をわざわざ表明するまでもなく，たやすく直接的に検証できるものです．

たとえば，$1 < n \in \omega$ なる n について $\mathrm{sd}(n) = \sum\{i : 1 \le i < n \wedge i | n\}$ を n の真の約数すべての和としましょう．たとえば $\mathrm{sd}(10) = 1 + 2 + 5 = 8$ ですし，n が完全数（たとえば 6, 28, $\cdots$）であることは $\mathrm{sd}(n) = n$ ということです．この函数 sd がわたくしたちが定めた意味で計算可能函数であることは簡単にわかります．たとえば正整数の有限集合の和は（補題 IV.3.13 に

より）その集合の函数として計算可能であるからです．なお，$x \in \{0,1\} \cup (HF \setminus \omega)$ のときは $\mathrm{sd}(x) = x$ ということにしましょう．標準的なプログラミング言語のどれでも，

$$f(x) = \begin{cases} x & \mathrm{sd}(x) = x \text{ の場合} \\ f(\mathrm{sd}(x)) & \mathrm{sd}(x) \neq x \text{ の場合} \end{cases}$$

という記述が認められます．そこで，たとえば $f(1) = 1$ であり $f(6) = 6$ となります．$f(10)$ を計算するように求められれば，コンピュータは $f(8)$ を計算せねばならないことを知り，（$1+2+4=7$ なので）そのために $f(7)$ が必要であると知り，それがまた $f(1)$ を必要とすることを知り，$f(1) = 1$ なので結局 $f(10) = 1$ となります．$f(x)$ が未定義になる（つまり $x \notin \mathrm{dom}(f)$ となる）のは，こうした計算が無限後退に陥る場合であることがわかるでしょう．たとえば $220 \notin \mathrm{dom}(f)$ であることが，みなさんにも簡単にたしかめられるはずです．定義域 $\mathrm{dom}(f)$ が決定可能であるかどうかは明らかではありませんが，それがわからなくても，次のことは簡単にわかるのです．

演習問題 IV.4.16　上のように記述された函数 f が部分計算可能函数であることを証明しなさい．

［ヒント］ $f(x) = y$ と $\exists s\, \varphi(x, y, s)$ が同値になることを示す．ここで，φ はたとえば $\varphi(10, 1, (10, 8, 7, 1))$ や $\varphi(12, 1, (12, 16, 15, 9, 4, 3, 1))$ や $\varphi(95, 6, (95, 25, 6))$ がいずれも真となるようなものである．□

IV.5　論理学における決定問題

決定可能性についての問いは数学のたくさんの分野に自然にあらわれるものです．ここでは論理学における問いに焦点をあわせます．

定義 IV.5.1　Λ を $\mathcal{L}$ の文のある集合として，Λ の論理的帰結全体の集合を $\mathrm{Conseq}(\Lambda)$ であらわす．すなわち，これは $\Lambda \vdash \varphi$ をみたす $\mathcal{L}$ の文 φ 全体の集合である．$\mathcal{L}$ の文のある集合 Υ が Λ の**拡大**であるとは，Λ に属する文がすべて Υ から証明可能であることをいう．なお，このセクションにおいて，$\mathcal{L}$ はつねに定義 IV.3.24 の意味において決定可能であるものと仮定する．

記号について少しばかり気を働かせておきましょう．Λ は $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ である

ような $\mathcal{L}'$ の文の集合でもあるので，ここにはちょっと危険な曖昧さが潜んでいるのですが，このセクションでは意図している $\mathcal{L}$ は固定されているものとし，またそれが文脈から明らかにわかるようにします．しばしば $\mathcal{L} = \{\in\}$ となっています．わたくしたちの「拡大」の定義は単に「$\Upsilon \supseteq \Lambda$」というよりも自然です．たとえば「$\Upsilon$ は ZFC の拡大である」という主張は，すべての数学者にとって同じ意味になってくれます．わたくしたちが本書で書き下したのと正確に同じ形の ZFC の公理をすべて Υ が含むかどうかをチェックするには及びません．

セクション IV.2 で説明したとおり，このセクションではいろいろな関係が決定可能であることをチャーチとチューリングの提唱の助けを借りながら「証明」します．これは，論理の構文の基本的な諸性質が決定可能（Δ_1）であることとか，文がなにかよく知られた公理系（ZFC なり，ねじれのない可除アーベル群の公理なり）に属しているかどうかが決定可能（Δ_1）であるといったことの検証を，読者に委ねてしまうことを意味します．補題 IV.3.23, IV.2.25, IV.3.26, IV.3.27 のストレートな拡張で細部を埋めることができます．

さてここで Λ として，自分たちが研究したい理論の公理の集合をとりましょう．Conseq(Λ) は決定可能でしょうか．それはもちろん Λ によります．答えが「イエス」である場合，その決定可能性の証明は通常はなにかモデル論的な技法を援用するものになります．たとえば，セクション II.13 で（それにこのあとの補題 IV.5.5 にも）示したとおり，Λ が完全であることを証明することで決定可能性の証明とすることができます．答えが「ノー」であるなら，たとえば HF の決定可能でない Σ_1 部分集合を作った定理 IV.2.2 などのような，再帰理論からのいくつかの事実が必要になります．

文献にあらわれる「決定可能」という言葉の用法の奇妙な歪みについて注意しておきましょう．数理論理学を含むたいていの数学の分野で，この言葉は，わたくしたちがここまで用いてきたとおり，Δ_1 ということの（あるいはそれと同値な，セクション IV.1 で説明したいくつかの概念のどれかの）同義語として用いられています．それで，たとえば，素数の集合は決定可能だ，論理式全体の集合は決定可能だ，ZFC の公理全体の集合は決定可能だ，などと，わたくしたちは言うわけです．ところが，このセクションでも扱う一つ

の特定の主題領域においては「Λ が決定可能」という表現が「Conseq(Λ) が決定可能」という意味で用いられることが，よくあるのです．普通には，研究の対象となる公理の集合 Λ 自身が決定可能なのは言うまでもなくて，公理からの帰結が決定可能かどうかだけが興味のある問いになるので，この用法にも弁護の余地はあります．混乱を未然に防ぐために，わたくしたちは，常に意図するところをはっきりさせます．たとえば，ZFC **に属するかどうか**は（チャーチとチューリングの提唱により明らかに）決定可能であるけれども，Conseq(ZFC) は（定理 IV.5.8 により）決定可能でない，と言うことにします．

文が Λ に属するかどうかが決定不能なのに Conseq(Λ) が決定可能となるような Λ をこしらえるのは簡単です．たとえば，何か文の決定不能な集合に ψ と $\neg\psi$ とをつけ加えた Λ を考えればよいでしょう．もう少しだけ意味のある例として：

演習問題 IV.5.2　$\mathcal{L}$ の文の Σ_1 集合 Λ があったとしなさい．このとき，$\mathcal{L}$ の文の Δ_1 集合 Ω を $\text{Conseq}(\Lambda) = \text{Conseq}(\Omega)$ となるようにとれる．
[ヒント]　Λ を $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ と計算可能な仕方でリストアップしたとすると，文の集合 $\{\varphi_0, \varphi_1 \wedge \varphi_1, \varphi_2 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_2, \cdots\}$ は決定可能になる．　□

フォーマルな証明を扱うさいに有用な記号を導入します：

定義 IV.5.3　$\vec{\Phi} \in HF$ とするとき，

（１）　SENTSEQ($\vec{\Phi}$) が真なのは，$\vec{\Phi}$ が $\mathcal{L}$ の文の空でない列のとき．

（２）　SENTSEQ($\vec{\Phi}$) が真であるとき，列 $\vec{\Phi}$ のいちばん後ろの文を ENDF($\vec{\Phi}$) とする．

（３）　SENTSEQ($\vec{\Phi}$) が真で $\vec{\Phi} = (\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ のとき，φ_i のうちで，論理の公理でなく，φ_k が $(\varphi_j \to \varphi_i)$ の形になるような $j, k < i$ も存在しないようなもの全体の集合を HYP($\vec{\Phi}$) とする．

集合 HYP($\vec{\Phi}$) は $\vec{\Phi}$ において用いられた**仮定**の集合です．定義 II.10.3 により，$\vec{\Phi}$ が Λ **からの**フォーマル証明であることと $\text{HYP}(\vec{\Phi}) \subseteq \Lambda$ であることは同値になります．そのとき，$\vec{\Phi}$ は ENDF($\vec{\Phi}$) のフォーマルな証明です．チャーチとチューリングの提唱によれば，SENTSEQ が決定可能であり

ENDF と HYP のグラフが Δ_1 であることは明らかです．とはいえこの先このセクションではこれらを定義する Σ_1 論理式が利用できればそれでよいのです．そこで：

記法 IV.5.4　sentseq と endf と hyp を，HF 上でそれぞれ以下の概念を表現する Σ_1 論理式とする：

（1）　$\mathrm{sentseq}(\vec{\Phi})$ が成立するのは $\mathrm{SENTSEQ}(\vec{\Phi})$ であるとき．

（2）　$\mathrm{endf}(\vec{\Phi}, \varphi)$ が成立するのは $\mathrm{SENTSEQ}(\vec{\Phi})$ かつ $\varphi = \mathrm{ENDF}(\vec{\Phi})$ のとき．

（3）　$\mathrm{hyp}(\vec{\Phi}, H)$ が成立するのは $\mathrm{SENTSEQ}(\vec{\Phi})$ かつ $H = \mathrm{HYP}(\vec{\Phi})$ のとき．

さらに，$\mathcal{L}$ の文の Σ_1 集合 Λ に対して，Σ_1 論理式 $\exists H[\mathrm{sentseq}(\vec{\Phi}) \wedge \mathrm{hyp}(\vec{\Phi}, H) \wedge \mathrm{endf}(\vec{\Phi}, \varphi) \wedge H \subseteq \Lambda]$ を $\mathrm{pr}_\Lambda(\vec{\Phi}, \varphi)$ であらわす．また，Σ_1 論理式 $\exists \vec{\Phi}\, \mathrm{pr}_\Lambda(\vec{\Phi}, \varphi)$ を $\mathrm{prv}_\Lambda(\varphi)$ であらわす．

ですから $\mathrm{pr}_\Lambda(\vec{\Phi}, \varphi)$ は $\vec{\Phi}$ が Λ からの φ のフォーマルな証明であると言っており，$\mathrm{prv}_\Lambda(\varphi)$ は $\Lambda \vdash \varphi$ と言っています．ここで「定義」と書かず「記法」と書いたのは，どの Σ_1 論理式を使うのかを明示していないからです．再帰理論を論じているぶんにはそれでも問題はありませんが，フォーマルな証明可能性について議論するにあたっては，「適切な」論理式を選ぶことが意味をもってきます．これについては記法 IV.5.21 と 358 ページも参照してください．また，prv_Λ は論理式の集合 Λ そのものではなく Λ の定義に用いられた Σ_1 論理式に依存します．ここにもちょっとした記号の濫用があります．

補題 IV.5.5　Λ を $\mathcal{L}$ の文からなる Σ_1 集合としよう．$\Psi := \mathrm{Conseq}(\Lambda)$ とおけば，Ψ も Σ_1 である．Λ が完全であれば Ψ は Δ_1 である．

【証明】　$\varphi \in \Psi$ は Σ_1 論理式 $\mathrm{prv}_\Lambda(\varphi)$ と同値である．Λ が完全であるときは $\varphi \notin \Psi$ は φ が $\mathcal{L}$ の文でない（これは Δ_1）か，あるいは $\mathrm{prv}_\Lambda(\neg\varphi)$（これは Σ_1）であるか，どちらかが成立することと同値であるから，Ψ の補集合も Σ_1 ということになる．□

そこで，$\mathrm{Th}(\mathbb{Q}; +)$ は決定可能です．この集合は Λ をねじれのない可除

アーベル群の公理系としたときの Conseq(Λ) に等しく，この Λ は補題 II.13.7 により完全であるからです．

公理の集合 Λ が完全でないけれども帰結の集合 Conseq(Λ) は決定可能である，ということを証明したい場合には，モデル理論の手法を用いることもできます．わかりやすい例として：

演習問題 IV.5.6　Λ を稠密全順序の公理の集合としたとき Conseq(Λ) が決定可能であることを証明しなさい．

[ヒント]　演習問題 II.13.10 を見なさい．四つの文 ψ_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ を，$\Lambda \cup \{\psi_i\}$ がそれぞれ完全であり，$\Lambda \vdash \bigvee_{i<4} \psi_i$ であるようにとれる．そこで，$\Lambda \vdash \varphi$ はどの i でも $\Lambda \cup \{\psi_i\} \vdash \varphi$ となることと同値である．□

決定可能な Λ であって Conseq(Λ) が決定不能になるようなものの存在は，アロンゾ・チャーチによって証明されました．$\mathcal{L} = \{\in\}$ の場合には Λ として集合論のいろいろな公理化（定理 IV.5.8 を参照）を選ぶことができます．たとえば，Λ は ZFC や，（選択公理と置換公理を除いた）Z をはじめとする，セクション I.2 と II.18 にリストした ZFC のいろいろな部分理論でありえます．また，$\mathcal{L} = \{\in\}$ のときには $\Lambda = \emptyset$ でもよいのです（系 IV.5.19 を参照）．つまり，1 個の二項関係記号に関する論理的に妥当な文全体の集合が決定不能なのです．ここで $\emptyset$ は何ひとつ主張しないので，この二項関係を $<$ でも R でもなく $\in$ と名付けたという事実はこの件には関係ありません．ただし，Z も ZFC も次に述べる意味で**本質的決定不能**であるのに対して，$\emptyset$ はそうではないのです．

定義 IV.5.7　Λ を $\mathcal{L}$ の文の集合とするとき，この Λ が**本質的決定不能**であるとは，Λ が無矛盾であり，Λ の無矛盾な拡大であるどんな Υ についても Conseq(Υ) が決定不能であることをいう．

もしも Λ が本質的決定不能であったならば，Conseq(Λ) が決定不能であることと，Λ の無矛盾な拡大がどれも本質的決定不能であることは明らかです．また，$\emptyset$ は本質的決定不能ではありえません．なぜなら，$\mathcal{L} = \{\in\}$ の場合であれば $\Upsilon = \{\forall x, y[x = y \wedge x \notin y]\}$ といったような，くだらない拡大があるからです．この Υ は，同型なものを除いて唯一の（ただ一つの要素の

みからなる）モデルをもつので，完全であり，$\mathrm{Conseq}(\Upsilon)$ が決定可能になります．

粗く言って，初歩的な有限の組合せ論を展開できる程度の強さをもつ理論はどれも本質的決定不能になります．これはとくに CST（定義 II.18.2 を参照）にあてはまります：

定理 IV.5.8　$\mathcal{L}=\{\in\}$ についての理論 CST は本質的決定不能である．

そこで，ZFC や Z や $ZFC-P$ などのよく知られた CST の拡大はいずれも本質的決定不能です．この定理の系である次の命題はこの定理そのものより著名です：

定理 IV.5.9（ゲーデルの第一不完全性定理）Υ は $\mathcal{L}=\{\in\}$ についての CST の無矛盾な拡大で，$\mathcal{L}$ の文が Υ に属するかどうかが Σ_1 であるものとする．このとき Υ は完全でない．

【証明】　定理 IV.5.8 により $\mathrm{Conseq}(\Upsilon)$ は決定可能でないので，補題 IV.5.5 により Υ は完全でない．　□

定理 IV.5.9 は定理 IV.5.8 よりも早い時期に証明されました．この種の結果のうちの最初のものだったので，ゲーデルが与えた証明は，こんなつまらないものではありませんでした．いろいろの文献には，この定理は，Υ が Σ_1 であるとの仮定の代わりに決定可能であるとの仮定のもとで述べられています．演習問題 IV.5.2 を考えに入れるならば，公理の Σ_1 集合への「拡張」は，実際にはたいした拡張ではありません．

この定理のインフォーマルな解釈を言えば，数学をどんなふうに公理化しようとも，公理がすべての問いに答えてくれることはない，ということです．たとえば ZFC は不完全で，連続体仮説の真偽を決定しません．この ZFC を少しばかり強化して，GCH などの若干の命題を追加すれば，完全な公理の集合 Υ が得られるのではないかと期待したくなりますが，不完全性定理によれば，Υ に属するかどうかが Σ_1 である限り，それはできない相談です．

これから定理 IV.5.8 の証明へと進みます．粗く言うと，HF の決定不能部分集合に関するセクション IV.4 の結果は，他のすべての数学の結果と同じく，ZFC から証明されます．Υ が ZFC の無矛盾な拡大である場合には

いつでも，そうした結果を Conseq(Υ) の決定不能性の ZFC からの証明に翻訳することができます．そして，その論法は ZFC を CST にまで弱めても，やはり有効なのです．

最初に，定義 II.17.10 と補題 II.17.11 に書いたとおり，すべての $b \in HF$ がそれぞれ Δ_0 論理式 δ_b で名付けられることを思い出しましょう．そのときの議論をここで復習しますが，いまは HF といった周知のモデルにおいて真であるかどうかを議論しているのではなく，ある非常に弱い公理体系で何が証明できるかを論じているところなので，前よりももっとペダンティックにやります．

定義 IV.5.10　$b \in HF$ に対して，論理式 $\delta_b(z)$ と $\widehat{\delta}_b(z)$ を

$$\delta_b(z) \text{ とは } \forall x \in z \bigvee_{a \in b} \delta_a(x) \wedge \bigwedge_{a \in b} \exists x \in z \delta_a(x),$$

$$\widehat{\delta}_b(z) \text{ とは } \forall x \left[x \in z \leftrightarrow \bigvee_{a \in b} \widehat{\delta}_a(x) \right]$$

のことであると，再帰的に定義する．

定義 II.17.10 のあとで，$\widehat{\delta}_b$ のほうが簡潔でわかりやすいけれども δ_b は Δ_0 であることと，HF においては両者は同値であることを，指摘しました．実をいうと，両者の同値性は CST のうんと弱い部分理論において証明できるのです．

定義 IV.5.11　TST（または Trivial Set Theory）とは，$\mathcal{L} = \{\in\}$ についての以下の 4 つの公理の集合である．ここでは，公理に含まれる自由変数は全称量化されているものとみなす：

（1） $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$,

（2） $\exists y \forall x(x \notin y)$,

（3） $\exists u \forall z(z \in u \leftrightarrow z = y)$,

（4） $\exists u \forall z(z \in u \leftrightarrow z \in v \vee z \in w)$.

公理 1 が外延性の公理で，公理 2 は空集合を与えてくれます．公理 3 は $\{y\}$ がいつでも存在すると言い，公理 4 は $v \cup w$ がいつでも存在すると言っています．これらの公理によって，あらゆる遺伝的有限集合の構成が可能になります．これら 4 つの公理のいずれも，外延性の公理と内包公理と対の公理

と和集合の公理からの帰結（セクション I.6 参照）ですから，定義 IV.5.1 の意味において，CST は TST の拡大になっています（しかし $CST \supseteq TST$ ではありません）．

補題 IV.5.12　各 $b \in HF$ について

（1）$TST \vdash \exists! y\, \widehat{\delta}_b(y)$,

（2）$TST \vdash \forall y\, [\, \delta_b(y) \leftrightarrow \widehat{\delta}_b(y)\,]$

となる．

【証明】　まず，各 k ごとに

$$TST \vdash \forall t_0, \cdots, t_{k-1} \exists! y \forall x \left[x \in y \leftrightarrow \bigvee_{i<k} x = t_i \right] \qquad (\divideontimes)$$

であることを見よう．このことは $\{t_0, \cdots, t_{k-1}\}$ が存在すること（そして外延性のおかげで一意的であること）を主張している．証明するには，公理 3 によって $\{t_i\}$ が得られ，それから公理 4（和集合）を $k-1$ 回適用して $\{t_0, \cdots, t_{k-1}\}$ を得る．特殊ケースとして，$k = 0$ のときは，空な $\bigvee$ が偽と解釈されることから，($\divideontimes$) は空集合の存在，すなわち公理 2 を主張することになる．

集合 b の階数に関する帰納法で(1)を確かめる．$b = \emptyset$ のときには(1)は空集合の存在を主張している．次に $b = \{a_0, \cdots, a_{k-1}\}$ だったとしよう．このとき $\mathrm{rank}(a_i) < \mathrm{rank}(b)$ である．帰納法の仮定として $TST \vdash \exists! y \widehat{\delta}_{a_i}(y)$ であるものとする．TST の中での議論として，t_i を $\widehat{\delta}_{a_i}$ をみたす唯一の対象とし，($\divideontimes$) によって $\widehat{\delta}_b$ をみたす唯一の対象を得る，と言ったとする．これで本当に TST からのフォーマルな証明が得られることを見るには，$\exists! y \widehat{\delta}_b(y)$ が TST のどんなモデルでも成立していることは簡単にわかるので，完全性定理 II.12.1 を適用するか，もっと厄介にはなるけれども有限主義的に，セクション II.11 の方法を適用することもできる．

次に(2)を b の階数に関する帰納法で確かめる．$b = \{a_0, \cdots, a_{k-1}\}$ のときには，(1)と各 a_i についての(2)を用いる．□

これで TST をもとにして議論するさいには δ_b と $\widehat{\delta}_b$ を好きに入れ換えて使ってよいことになりました．

これから，HF の要素について量化なしの論理式で言える事実，たとえば

$3 \in 7 \wedge 2 \neq 4$ といったことのすべてが TST から証明できることを示します．もちろん $2, 3, 4, 7$ といったものは言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ の記号ではないのですが，論理式 δ_b を使えば HF のさまざまな要素 b について語れるわけです．そのための規約を次に与えます：

定義 IV.5.13　$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が $\mathcal{L} = \{\in\}$ の論理式で $b_1, \cdots, b_n$ が HF の要素のとき，$\varphi(\ulcorner b_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_n \urcorner)$ は論理式

$$\exists x_1, \cdots, x_n \, [\, \delta_{b_1}(x_1) \wedge \cdots \delta_{b_n}(x_n) \wedge \varphi(x_1, \cdots, x_n)\,]$$

の略記であるものとする．

いくつか注意をします．

補題 IV.5.12 を見ると，$\varphi(\ulcorner b_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_n \urcorner)$ が

$$\forall x_1, \cdots, x_n \, [\, \delta_{b_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \delta_{b_n}(x_n) \to \varphi(x_1, \cdots, x_n)\,]$$

と同値であることがわかります．だから φ が Π_1 論理式なら $\varphi(\ulcorner b_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_n \urcorner)$ は Π_1 論理式と同値だし，φ が Σ_1 論理式なら $\varphi(\ulcorner b_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_n \urcorner)$ は Σ_1 論理式と同値になるわけです．

インフォーマルに言えば，b を引きあいに出す方法が $\ulcorner b \urcorner$ によって与えられます．HF の要素 b と，フォーマルな言語におけるその名前とは，きちんと区別しなければなりません．エミュー（emu）は 2 本脚の生き物ですが，“emu” は 2 音節の単語です．ヒトコブラクダ（dromedary）と数 4 についても同様のことが言えます．たとえば “an emu has as much legs as a dromedary”（エミューの脚の多さはヒトコブラクダと同じ）という文について議論しているとき，この文が偽だというのは生物学の問題（セマンティクス）であり，これが下手な文だというのは文法の問題（シンタクス）です．

集合論には，エミューたちもヒトコブラクダたちも出てきませんが，文 $\ulcorner 2 \urcorner = \ulcorner 4 \urcorner$ を ψ とする，ということはできます．この文は $\exists x, y \, [\, \delta_2(x) \wedge \delta_4(y) \wedge x = y\,]$ の略記ですが，後者もまた何かもっと長い論理式の略記です．このときセマンティクスに関する事実として（明らかに）$HF \models \neg\psi$ となり，シンタクスに関する事実として（補題 IV.5.14 からわかるとおり）$TST \vdash \neg\psi$ となります．また，再帰理論に関する事実として（チャーチとチューリングの提唱からわかるとおり），$\mathcal{L} = \{\in\}$ の各論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ について，

$b_1, \cdots, b_n \in HF$ を入力すれば文 $\varphi(\ulcorner b_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_n \urcorner)$ を（実際にはこれが略記しているもっと長い文を）出力する n 変数函数があって，それらは計算可能函数になります．

フォーマルな言語の対象 $\ulcorner 2 \urcorner$ や $\ulcorner 4 \urcorner$ が定義されたわけではないことにも注意しましょう．これが本書の最後でなく最初であったなら，対象を引き合いに出すための，日用の言語にみられるような規則を，述語論理のフォーマルな言語に追加することにしたかもしれません．とはいえ，フォーマルな証明可能性の主張を検証するときには，セクション II.15 で述べたように，定義による拡大は保守拡大であることを覚えていれば，ときに有用です．とりわけ，わたくしたちは各 $b \in HF$ ごとに $TST \vdash \exists ! y \delta_b(y)$ となることを証明したばかりなので，TST や，それより強い理論で議論しているときには，各 $b \in HF$ に対する $\ulcorner b \urcorner$ を定数記号として追加し，定義のための公理 $\delta_b(\ulcorner b \urcorner)$ を追加することによって言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ を拡張できます．

次に示す補題は，ダイアグラム Diag(HF)（定義 II.14.7 を参照）を構成する文はいずれも TST から証明可能であり，したがって TST のどんなモデルも $(HF; \in)$ と同型な部分モデルをもつことを示しています．

補題 IV.5.14 HF の元 a, b, d について

（1） $a \in b$ のとき $TST \vdash \ulcorner a \urcorner \in \ulcorner b \urcorner$,

（2） $a \notin b$ のとき $TST \vdash \ulcorner a \urcorner \notin \ulcorner b \urcorner$,

（3） $b = d$ のとき $TST \vdash \ulcorner b \urcorner = \ulcorner d \urcorner$,

（4） $b \neq d$ のとき $TST \vdash \ulcorner b \urcorner \neq \ulcorner d \urcorner$

となっている．

【証明】 自然数 n に関する主張

$P(n)$： すべての $b, d \in R(n+1)$ と $a \in R(n)$ について
(1)–(4)が成立する

を，帰納法で検証する．ただしもちろん(3)はつねに自明である．以下，「証明可能」は「TST から証明可能」の意味だとする．$n = 0$ のとき：$R(0) = \emptyset$ かつ $R(1) = \{\emptyset\}$ であるから，(1) (2) (4) はともに無内容に真である．

次に帰納のステップについて．$n > 0$ であり $P(n-1)$ が成立していると仮定しよう．補題 IV.5.12 から，$\ulcorner a \urcorner \in \ulcorner b \urcorner$ と $\exists y \left[\widehat{\delta}_b(y) \wedge \ulcorner a \urcorner \in y \right]$ の同値

性が証明可能．後者は $\bigvee_{c\in b}\delta_c(\ulcorner a\urcorner)$ と同値，したがって $\bigvee_{c\in b}(\ulcorner a\urcorner=\ulcorner c\urcorner)$ と同値．これらの c は $R(n)$ に属するので，$P(n)$ における (1) と (2) は $P(n-1)$ における (3) と (4) から従う．$P(n)$ における (4) を証明するために $b,d\in R(n+1)$ かつ $b\neq d$ だったとして，b と d のどちらか一方だけに属する a を固定する．このとき $a\in R(n)$ なので (1) と (2) により $\neg[\ulcorner a\urcorner\in\ulcorner b\urcorner\leftrightarrow\ulcorner a\urcorner\in\ulcorner d\urcorner]$ が証明でき，これから $\ulcorner b\urcorner\neq\ulcorner d\urcorner$ が従う．　□

より広く，補題 IV.5.14 はすべての Δ_0 論理式について成立します．

補題 IV.5.15　$\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})$ が $\mathcal{L}=\{\in\}$ の Δ_0 論理式で，$b_0,\cdots,b_{n-1}$ が HF の元のとき，

（1）$HF\vDash\varphi[b_0,\cdots,b_{n-1}]$ ならば $TST\vdash\varphi(\ulcorner b_0\urcorner,\cdots,\ulcorner b_{n-1}\urcorner)$，

（2）$HF\vDash\neg\varphi[b_0,\cdots,b_{n-1}]$ ならば $TST\vdash\neg\varphi(\ulcorner b_0\urcorner,\cdots,\ulcorner b_{n-1}\urcorner)$

となる．

【証明】　φ に関する帰納法．φ が原子論理式のときは補題 IV.5.14 から明らかであり，また，命題演算にたいする帰納のステップは簡単だ．

存在量化 $\exists$ についての帰納のステップについて，$\varphi(x_0,\cdots,x_{n-1})$ が $\exists y\in x_0\,\psi(x_0,\cdots,x_{n-1},y)$ であって，ψ については補題が成立していると仮定しよう．HF の要素 $b_0,\cdots,b_{n-1}$ を固定して，とくに $b_0=\{c_0,\cdots,c_{k-1}\}$ だったとしよう．(1) を示すために $\varphi^{HF}(b_0,\cdots,b_{n-1})$（記法 II.17.12 参照）が成立したとして，$\psi^{HF}(b_0,\cdots,b_{n-1},c_i)$ が成立する $i<k$ をとる．すると，$TST\vdash\psi(\ulcorner b_0\urcorner,\cdots,\ulcorner b_{n-1}\urcorner,\ulcorner c_i\urcorner)$ かつ $TST\vdash\ulcorner c_i\urcorner\in\ulcorner b_0\urcorner$ なので $TST\vdash\varphi(\ulcorner b_0\urcorner,\cdots,\ulcorner b_{n-1}\urcorner)$ となる．(2) を示すために $\neg\varphi^{HF}(b_0,\cdots,b_{n-1})$ だったと仮定する．すると各 i で $\neg\psi^{HF}(b_0,\cdots,b_{n-1},c_i)$ であるから $TST\vdash\neg\psi(\ulcorner b_0\urcorner,\cdots,\ulcorner b_{n-1}\urcorner,\ulcorner c_i\urcorner)$ となる．このことと，$TST\vdash\forall y\,[\,y\in\ulcorner b_0\urcorner\leftrightarrow\bigvee_{i<k}y=\ulcorner c_i\urcorner]$ であることから，$TST\vdash\neg\varphi(\ulcorner b_0\urcorner,\cdots,\ulcorner b_{n-1}\urcorner)$ となる．

全称量化 $\forall$ についての帰納のステップについてもこれと同様である．　□

こうした補題があらゆる φ について成立するわけではありません．たとえば無限の公理は Σ_1 文であり，HF では成立しませんが，（TST のモデルである $R(\omega+\omega)$ では無限の公理が成立しているので）その否定文が TST から証明できるわけではありません．それでも，HF で成立している Σ_1 な主張

は，すべて TST から証明できます．

補題 IV.5.16 $\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ が $\mathcal{L} = \{\in\}$ の Σ_1 論理式で，$b_0, \cdots, b_{n-1}$ が HF の元のとき，$TST \vdash \varphi(\ulcorner b_0 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_{n-1} \urcorner)$ と $HF \vDash \varphi[b_0, \cdots, b_{n-1}]$ は同値である．

【証明】 $HF \vDash TST$ なので $\Rightarrow$ は任意の論理式 φ について自明である．逆の $\Leftarrow$ を示すために，$\varphi(x_0, \cdots, x_{n-1})$ が $\exists y_0 \exists y_1 \cdots \exists y_{k-1} \psi$ であり $\psi(x_0, \cdots, x_{n-1}, y_0, \cdots, y_{k-1})$ が Δ_0 であったとしよう．$HF \vDash \varphi[\vec{b}]$ であれば $c_0, \cdots, c_k \in HF$ を $HF \vDash \psi[\vec{b}, \vec{c}]$ となるようにとれる．このとき補題 IV.5.15 により $TST \vdash \psi(\ulcorner b_0 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_{n-1} \urcorner, \ulcorner c_0 \urcorner, \cdots, \ulcorner c_{k-1} \urcorner)$ であるから $TST \vdash \varphi(\ulcorner b_0 \urcorner, \cdots, \ulcorner b_{n-1} \urcorner)$ である． □

定理 IV.5.8 の証明において鍵となる定義と補題が，これらの補題から示唆されてきます．

定義 IV.5.17 Υ を $\mathcal{L} = \{\in\}$ の文のある集合とし，$\psi(x)$ を自由変数を一つだけもつ論理式とする．HF の部分集合 R をとる．このとき，Υ 上で ψ が R を**弱い意味で表現する**とは，$R = \{\, b \in HF : \Upsilon \vdash \psi(\ulcorner b \urcorner) \,\}$ であることをいい，Υ 上で ψ が R を**強い意味で表現する**とは，Υ 上で ψ と $\neg\psi$ がそれぞれ R と $HF \setminus R$ を弱い意味で表現することだとする．さらに，R が Υ 上で**弱い意味で表現可能**であるとは，ある論理式が Υ 上で R を弱い意味で表現することだとする．R が Υ 上で**強い意味で表現可能**であるとは，ある論理式が Υ 上で R を強い意味で表現することだとする．

ですから，補題 IV.5.16 は HF の Σ_1 部分集合はすべて TST 上で弱い意味で表現可能であることを意味し，補題 IV.5.15 は HF の Δ_0 部分集合はすべて TST 上で強い意味で表現可能であることを意味します．いろいろの文献において，単に「表現可能」とだけ言ったらそれは「強い意味で表現可能」という意味です．

補題 IV.5.18 Υ を $\mathcal{L} = \{\in\}$ の文のある集合とし，HF の Δ_1 部分集合がすべて Υ 上で弱い意味で表現可能であるものとする．このとき，$\mathrm{Conseq}(\Upsilon)$ は決定不能である．

【証明】　集合 $U \subseteq HF^2$ を，$\varphi(x)$ が自由変数を一つだけもつ論理式で b が $\Upsilon \vdash \varphi(\ulcorner b \urcorner)$ となるような HF の要素であるときの対 (φ, b) 全体の集合としよう．すると，HF のすべての Δ_1 部分集合 R は（R を弱い意味で表現する論理式 φ によって）U_φ という形になる．もしも $\mathrm{Conseq}(\Upsilon)$ が決定可能であったとすれば，U は Δ_1 であり，したがって普遍 Δ_1 集合となって，補題 IV.4.2 に述べた対角線論法によって矛盾に至る．□

系 IV.5.19　言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ において，$\mathrm{Conseq}(TST)$ と $\mathrm{Conseq}(\emptyset)$ はいずれも決定不能である．

【証明】　TST については補題 IV.5.18 と補題 IV.5.16 を使えばわかる．$\emptyset$ については，$\bigwedge TST$ を TST の 4 つの公理の連言とすれば，$TST \vdash \psi$ と $\emptyset \vdash \bigwedge TST \to \psi$ とが同値なので，もしも $\mathrm{Conseq}(\emptyset)$ が決定可能であるなら $\mathrm{Conseq}(TST)$ も決定可能ということになるが，それは成立しない．□

定理 IV.5.8 を証明する目的で，この論法を TST の任意の拡大 Υ に適用した場合，問題点が二つ出てきます．

（1）（明瞭な問題）　Υ が無限集合の存在を証明できる理論であった場合，補題 IV.5.16 が無効になる．

（2）（それほど明瞭でない問題）　Υ は有限集合について何か偽な命題を証明する可能性がある．

このうち (1) については次の補題の証明の中で説明を加えます．それによって，どのようにこの問題を解決すればよいかもわかります．

補題 IV.5.20　Υ は TST の拡大であり，ある推移的集合 $M \supseteq HF$ において成立しているとする．このとき，

（a）　HF の Σ_1 部分集合は Υ 上で弱い意味で表現可能である．

（b）　$\mathrm{Conseq}(\Upsilon)$ は決定不能である．

（c）　Υ に属するかどうかの判定が Σ_1 であるならば，M でも HF でも真でありながら，Υ から証明できないような Π_1 文が存在する．

【証明】　補題 IV.5.18 によって，(b) は (a) からただちに出てくる．

(a) について，R を HF の Σ_1 部分集合とし，$\varphi(x)$ を $R = \{b \in HF :$

$HF \vDash \varphi[b] \,\}$ としよう．補題 IV.5.16 のときと違って，$R = \{\, b \in HF : \Upsilon \vdash \varphi(\ulcorner b \urcorner) \,\}$ とは言えない．たとえば Υ が無限の公理（これも Σ_1 文である）を含むものとして，$\varphi(x)$ として $x = x \wedge$ 無限の公理という Σ_1 論理式をとる．このとき $\{\, b \in HF : HF \vDash \varphi[b] \,\} = \emptyset$ であるが $\{\, b \in HF : \Upsilon \vdash \varphi(\ulcorner b \urcorner) \,\} = HF$ である．

それでも，議論がうまくいくように φ を修正することはできる．$\varphi(x)$ が Δ_0 論理式 $\theta(x,y)$ から $\exists y\, \theta(x,y)$ のように得られたとしよう．$\psi(x)$ を $\exists y\, [\mathrm{HrdFin}(y) \wedge \theta(x,y)]$ とする（HrdFin については定義 II.18.3 を参照）．HF の中では $\mathrm{HrdFin}(y)$ はつねに成立しているので，$R = \{\, b \in HF : HF \vDash \psi[b] \,\}$ となる．そこで，次に $R = \{\, b \in HF : \Upsilon \vdash \psi(\ulcorner b \urcorner) \,\}$ を示せば (a) が証明できる．

そのために HF の要素 b をとる．$\Upsilon \vdash \psi(\ulcorner b \urcorner)$ であれば，$M \vDash \psi[b]$ なので，M の要素 c を $(\mathrm{HrdFin}(c) \wedge \theta(b,c))^M$ となるようにとれる．ところがそうすると M の要素 n, t, f を $[c \subseteq t \wedge \mathrm{trans}(t) \wedge \mathrm{nat}(n) \wedge bij(f,n,t)]^M$ となるようにとれることになるが，Δ_0 で書ける性質の絶対性によって，n は本当に自然数であり，n も c も t も HF の要素である．それで $HF \vDash \psi[b]$ したがって $b \in R$ となる．逆に，$b \in R$ であれば，$HF \vDash \psi[b]$ であり，ψ が Σ_1 論理式（に同値）であり，Υ が TST の拡大であることから，$\Upsilon \vdash \psi(\ulcorner b \urcorner)$ となる．

(c) については，(a) の論法を Σ_1 であって Π_1 でない集合 R に適用して，φ と ψ を考える．このとき ψ は M 上でも HF でも R を定義する．$J = \{\, b \in HF : \Upsilon \vdash \neg\psi(\ulcorner b \urcorner) \,\}$ とおくと，$M \vDash \Upsilon$ であることから $J \subseteq \{\, b \in HF : M \vDash \neg\psi[b] \,\} = HF \setminus R$ となる．いっぽう，J は補題 IV.5.5 によって Σ_1 集合であり，$HF \setminus R$ は Σ_1 でない Π_1 集合だから，$J \neq HF \setminus R$ である．$HF \setminus R$ の要素 b を $b \notin J$ となるようにとろう．すると，$\Upsilon \nvdash \neg\psi(\ulcorner b \urcorner)$ である．そこで $\neg\psi(\ulcorner b \urcorner)$ は，M でも HF でも真なのに Υ から証明できない Π_1 文（に同値な論理式）である．□

この補題はこれまでに推移的モデルの得られた TST のさまざまな拡大に適用できます．たとえば（$R(\gamma)$ をモデルにもつ）ZC とか（$H(\kappa)$ をモデルにもつ）$ZFC - P$ などです．(c) について言うと，こうした性質をもつ Π_1 文の「シンプルな」例は存在しません．なぜなら，これらの理論はいずれも

HF で成立する「シンプルな」Π_1 文で書ける事実，たとえばどんな自然数も四つの平方数の和であることなど，を証明するのに十分な強さをもっているからです．あるいは，もっともシンプルな例文は $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ かもしれません．これは Π_1 であり，（$M \vDash \Upsilon$ なので）真でもあり，ゲーデルの第二不完全性定理によって $\Upsilon \nvdash \mathrm{Con}(\Upsilon)$ でもあります．

ここでもちろん，$\mathrm{Con}(\Upsilon)$ が Π_1 であるというためには，文が Υ に属するかどうかの判定が Σ_1 だと仮定し，**しかも**，モデル理論的な無矛盾性 $\mathrm{Con}_{\vDash}$ ではなく証明論的・有限主義的な $\mathrm{Con}_{\vdash}$ に訴えねばなりません．この 2 とおりの無矛盾性は ZFC においては（ゲーデルの完全性定理により）同値ですが，すべての $M \supseteq HF$ においてそうした同値性が成立する保証はないのです．たとえば $M = HF$ の場合，もしも Υ が無限モデルのみをもつのであれば $\mathrm{Con}_{\vDash}(\Upsilon)$ は M において不成立です．そこで，記法 IV.5.4 に引き続いて：

記法 IV.5.21　Υ が $\mathcal{L} = \{\in\}$ の文の Σ_1 集合であるとき，$\mathrm{Con}(\Upsilon)$ とは $\neg\,\mathrm{prv}_{\Upsilon}(\ulcorner\neg\forall x{=}xx\urcorner)$ なる Π_1 文のことだとする．さらに，これまでに定義した Σ_1 と Π_1 の論理式 sentseq, hyp, pr_{Υ}, prv_{Υ}, $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ が，すべての推移的な $M \supseteq HF$ において HF におけると同じ意味をもつものと仮定する．

一般に，HF で真になる Σ_1 な性質は $M \supseteq HF$ でも真になる（補題 II.17.24 参照）のですが，たとえば無限の公理を考えればわかるとおり，その逆は言えません．それでも，有界でない量化を（補題 IV.5.20 の証明でやったように述語 $\mathrm{HrdFin}(x)$ を使って）遺伝的有限集合へと相対化すれば，どんな Σ_1 論理式もどんな Π_1 論理式も，HF, M に対して絶対的（定義 II.17.7 参照）な論理式へと「人為的に」変換することは可能です．先ほど触れたいくつかの述語のように，もともと有限な対象について語っている述語の場合は，この相対化はいたって自然におこなわれます．たとえばフォーマルな証明の存在について述べている prv_{Υ} などがそうです．定義上，フォーマルな証明とは，有限順序数の型に添字づけされた列です．HF の中だけで考えている限りは，いちいち「有限」という言葉をつけねばならない理由はないのですが，そうするのは自然なことですし，それに，そうすることにより，これらの定義が M においても同じ意味をもつことになります．もちろん，この相対化の手法を Σ_1 文である無限の公理に適用すれば，すべての有限順序

数を含む有限集合の存在を主張する文が得られることになりますが，これはすべてのモデルで偽となります．

次に (2) の問題について考えましょう．ここでは $\varUpsilon$ を仮に $ZC + \neg\,\mathrm{Con}(ZC)$ としておきます．$ZC \nvdash \mathrm{Con}(ZC)$ なので $\varUpsilon$ は無矛盾ではありますが，いかなる推移的モデルもありません．それでも，無矛盾である以上，$\varUpsilon$ はなんらかのモデルはもつわけです．そこで，$\mathfrak{A} = (A; E) \vDash \varUpsilon$ としましょう．$\varUpsilon$ は TST の拡大ですから，補題 IV5.14 によって，$\mathfrak{A}$ は HF のコピーを内包することになります．よりフォーマルに言えば，HF の要素 b に対して，$\mathfrak{A} \vDash \delta_b[b_{\mathfrak{A}}]$ をみたす唯一の A の要素を $b_{\mathfrak{A}}$ であらわします．すると，A の要素のうち $b_{\mathfrak{A}}$ に対して関係 E にあるものは，ちょうど $a \in b$ であるような a についての $a_{\mathfrak{A}}$ の全体と一致します．さて，$\varUpsilon$ には $\neg\,\mathrm{Con}(ZC)$ が含まれているので，A のある要素 $\vec{\varPhi}$ を $\mathfrak{A} \vDash \mathrm{pr}_{ZC}(\vec{\varPhi}, \ulcorner \neg\forall x{=}xx \urcorner)$ となるようにとれます．つまり $\mathfrak{A}$ は $\vec{\varPhi}$ のことを ZC が矛盾するということのフォーマルな証明とみなしています．ところが実際には ZC は（$R(\omega+\omega) \vDash ZC$ なので）無矛盾ですから，この $\vec{\varPhi}$ は本物のフォーマルな証明ではありえません．$b_{\mathfrak{A}}$ の形の要素の一つではないわけです．$\vec{\varPhi}$ は超準的な対象で，$\mathfrak{A}$ は，それをフォーマルな証明だとみなしている以上，また遺伝的有限であるともみなしています．つまり $\mathfrak{A} \vDash \mathrm{HrdFin}[\vec{\varPhi}]$ となっています．しかし，$\mathfrak{A}$ の外からこれを眺めるならば，$\vec{\varPhi}$ はいかなる集合論的対象とも同定することができません．このことについては演習問題 IV.5.34 も参照しなさい．

このように $\mathfrak{A} \vDash \varUpsilon$ となるモデル $\mathfrak{A}$ はかなり奇妙なものですが，それらはいずれも HF のコピーを順序 $\lhd$ に関する A の切片として内包していて，そのことを利用して $\mathrm{Conseq}(\varUpsilon)$ の決定不能性を証明することができるのです：

【定理 IV.5.8 の証明】　CST の無矛盾な拡大 $\varUpsilon$ をとる．$\mathrm{Conseq}(\varUpsilon)$ が決定不能であることを証明する．

セクション II.18 の内容を思い出せば，CST の中で，（$\varSigma_1$ 論理式 $\mathrm{HrdFin}(x)$ によって定義される）遺伝的有限集合全体の基本的な諸性質を展開できることがわかる．ただし，HF はここではクラス（ひょっとしたら真クラスかもしれない）と考える必要がある．さらに，CST の中で順序 $\lhd$ を補題 IV.3.17 で述べたように $\varSigma_1$ で定義できる．以下，$x \lhd y$ は $\mathrm{HrdFin}(x) \wedge \mathrm{HrdFin}(y)$

を含意するように定義されているものとする．以下の言明の検証は読者に任せよう：

（a） $CST \vdash$「$\lhd$ は HF を全順序づけする」

（b） HF の各要素 c について $CST \vdash \forall z \in HF[\, z \lhd \ulcorner c \urcorner \to \bigvee\{\, z = \ulcorner d \urcorner : d \lhd c\,\}]$.

（c） HF の各要素 d について $CST \vdash \forall y \in HF[\ulcorner d \urcorner \lhd y \vee \bigvee\{\, y = \ulcorner c \urcorner : c \unlhd d\,\}]$.

この (b) と (c) における記号 $\bigvee$ は通常の論理の選言記号をあらわしている．たとえば，$c = 2$ の場合には (b) は $\forall z\,[\mathrm{HrdFin}(z) \to [\, z \lhd \ulcorner 2 \urcorner \to [\, z = \ulcorner 0 \urcorner \vee z = \ulcorner 1 \urcorner \vee z = \ulcorner \{1\} \urcorner]]]$ が CST から証明できるという意味になる．

補題 IV.5.18 のおかげで，定理 IV.5.8 を証明するにはすべての Δ_1 集合 $R \subseteq HF$ が Υ 上で弱い意味で表現可能であることを示せば十分である．Δ_1 関係 R を固定しよう．Δ_0 論理式 $\alpha(x,y)$ と $\beta(x,y)$ を，HF のすべての要素 b に対して $b \in R \leftrightarrow \exists c \in HF\, \alpha(b,c)^{HF}$ と $b \notin R \leftrightarrow \exists d \in HF\, \beta(b,d)^{HF}$ が成立するようにとる．ここでもちろん α と β は Δ_0 論理式であるから推移的モデルに対して絶対的なのだが，Υ のモデルがすべて推移的集合になる保証はないし，そもそも推移的モデルが一つも存在しない可能性もあるので，Υ からの証明可能性の議論においては少なからず用心せねばならない．$\exists y \in HF\,[\,\alpha(x,y) \wedge \forall z \lhd y \neg\beta(x,z)\,]$ を $\psi(x)$ としよう．HF の要素 b を固定し，以下で $b \in R \Longleftrightarrow \Upsilon \vdash \psi(\ulcorner b \urcorner)$ を示す．

$(\Rightarrow)$ について： HF の要素 c を $\alpha(b,c)^{HF}$ となるようにとる．α は Δ_0 なので $TST \vdash \alpha(\ulcorner b \urcorner, \ulcorner c \urcorner)$ である．また，すべての $d \in HF$ について，$\beta(b,d)$ は偽であるから $TST \vdash \neg\beta(\ulcorner b \urcorner, \ulcorner d \urcorner)$ である．そこで上記の (b) から $CST \vdash \psi(\ulcorner b \urcorner)$，したがって $\Upsilon \vdash \psi(\ulcorner b \urcorner)$ となる．

$(\Leftarrow)$ について： $b \notin R$ と仮定し，HF の要素 d を $\beta(b,d)^{HF}$ となるようにとる．上で議論したのと同様にして，$TST \vdash \beta(\ulcorner b \urcorner, \ulcorner d \urcorner)$ であり，すべての $c \in HF$ について $TST \vdash \neg\alpha(\ulcorner b \urcorner, \ulcorner c \urcorner)$ である．いま $\neg\psi(x)$ が $\forall y \in HF\,[\,\neg\alpha(x,y) \vee \exists z \lhd y\, \beta(x,z)\,]$ と同値であるので，(c) を用いて $CST \vdash \neg\psi(\ulcorner b \urcorner)$，したがって Υ の無矛盾性により $\Upsilon \nvdash \psi(\ulcorner b \urcorner)$ である．□

代数学上のいろいろな理論の決定可能性についてはとても多くの研究がなされています．たとえば群の理論，すなわちセクション 0.4 で述べた公理系

GP に対する Conseq(GP) は決定不能ですが，アーベル群の理論は決定可能です．この二つの結果はいずれも，本書でこれまでに述べてきたことだけからでは，明白というわけにいきません．Conseq(GP) については，有限文字列の理論を GP の中でコード化することによって系 IV.5.19 の証明を模倣できるということを，群論のトリヴィアルでない結果を使って示さねばなりません．アーベル群については，ある文がすべてのアーベル群について真であるかどうかという問いが整数の剰余類の算術に帰着させられることを見るために，アーベル群の構造の理論を利用します．なお，アーベル群の理論の完全な拡大は無限に多く（実際には $2^{\aleph_0}$ 個）存在するので，演習問題 IV.5.6 の手法を使うことは，ここではできません．次の演習問題では，ここで用いられる手法の雰囲気を，うんと単純化された設定のもとで味わうことができるでしょう．

演習問題 IV.5.22　$\mathcal{L} = \emptyset$ のときは Conseq($\emptyset$) が決定可能であることを証明しなさい．さらに，任意の素数 p に対して，指数 p のアーベル群の理論が決定可能であることを示しなさい．

[ヒント]　まず $\emptyset$ の場合：等号だけの理論の文 φ について考えることになる．そのモデルは要するに空でない集合であり，φ がすべてのモデルで真であるかどうか判定しようとしているわけだ．無限集合の理論は任意の無限基数 κ について κ-範疇的であり，したがって完全であるから決定可能である．すなわち，無限モデルどうしはすべて初等的同値である．ただし，あと $\aleph_0$ 個の有限モデルについても考えねばならない．そこで，lh(φ) に関する帰納法で，$n \geq \mathrm{lh}(\varphi)$ であるかぎり（定義 II.16.1 の意味で）$n \preccurlyeq_\varphi \omega$ となることを示しなさい．

群の場合も，演習問題 II.13.8 を用いて同様に考えること．　□

このセクションを，真理値の定義不可能性についてのタルスキの定理と，ゲーデルの第二不完全性定理という，数学の基礎に関連した二つの結果で締めくくることにします．歴史的には第二不完全性定理のほうが先なのですが，タルスキの定理について先に論じるほうが効果的で，そうすれば，第二不完全性定理はいたって簡単な系として得られます．この二つの定理はいずれもカントールの対角線論法の応用例なのです．

タルスキの定理は粗く言うとモデルにおける真偽はそのモデルにおいて定義できないというものです．ここでは集合論のモデルに話を絞りましょう．モデル理論の通例どおり ZFC で考えます． M が CST の推移的モデルのとき，M において真であるような $\mathcal{L} = \{\in\}$ の文全体の集合 $\mathrm{Th}(M)$ は，M の要素の全体に渡る量化だけを用いて定義することはできない，ということを証明します．このことはセクション II.19 でできないこともなかったのですが，ここでは，M が CST のモデルであるので，論理の構文に関するものを含むいろいろな決定可能な概念が M において定義可能であることを示すために，これまでの再帰理論の結果を利用することができるのです．

いまは基礎論的な問題について語っているところですから，いろいろの基本概念の定義を普段よりもペダンティックに書き出しておくことにします．クラトフスキ流の順序対 $\{\{p\},\{p,q\}\}$ のことは $\langle p,q\rangle$ と書き，(p,q) と書いたらこれは集合 2 を定義域とする函数をあらわすことにします．つまり $(p,q) = \{\langle 0,p\rangle, \langle 1,q\rangle\}$ ということになります．対に限らず 3 つ組，4 つ組などについても考えたいので，(p,q) を使うほうが自然です．そこで $P \times Q = \{\,(p,q) : p \in P \wedge q \in Q\,\}$ とし，$P^2 = P \times P$ とします．また，P^1 とは $\{\,(p) : p \in P\,\}$ のことではなくて P そのもののことだとします．そこで，集合 P 上の単項関係とは実は P の部分集合のことです．

モデル M が推移的で CST をみたすので $HF \subseteq M$ であり，HF の各要素 b は M において Δ_0 論理式 $\delta_b(x)$ によって定義されます．また，$p,q,r \in M$ のとき M は $\langle p,q\rangle$ も (p,q) も (p,q,r) も含むので，$M^2, M^3, \cdots \subseteq M$ となります．

定義 IV.5.23　$FORM_k$ とは，言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ のちょうど k 個の自由変数をもつ論理式全体の集合のことである．とくに $FORM_0$ は $\mathcal{L}$ の文全体の集合である．$\varphi \in FORM_k$ のとき，$D_\varphi = \{\,\vec{a} \in M^k : M \vDash \varphi[a_0,\cdots,a_{k-1}]\,\}$ とおく．この定義があいまいさを残さないように，VAR にはあらかじめ順序型 ω の決定可能な順序づけをしてあるものと仮定する．$\varphi \in FORM_{k+\ell}$ であり $\vec{b} \in M^\ell$ であるとき，$D_{\varphi,\vec{b}} = \{\,\vec{a} \in M^k : M \vDash \varphi[\vec{a},\vec{b}]\,\}$ とおく．

集合 $D_{\varphi,\vec{b}}$ は，M 上で M からのパラメータを使って定義できる集合と呼ばれます．また，D_φ の形の集合は M 上でパラメータを使わずに定義で

きる集合です．これらの集合を集めて，

定義 IV.5.24　$\mathcal{D}_k^-(M) = \{ D_\varphi : \varphi \in FORM_k \}$，そして $\mathcal{D}_k^+(M) = \{ D_{\varphi,\vec{b}} : \ell \in \omega \wedge \varphi \in FORM_{k+\ell} \wedge b_0, \cdots, b_{\ell-1} \in M \}$.

実際には $\mathcal{D}_k^+(M)$ に属する集合はどれも一個のパラメータ b だけを使って得られます．そのおかげで対角線論法が少し簡単になります．

補題 IV.5.25　M が推移的で $M \vDash CST$ のとき，$\mathcal{D}_k^+(M) = \{ D_{\varphi,b} : \varphi \in FORM_{k+1} \wedge b \in M \}$.

【証明】　集合 b が列 $(b_0, \cdots, b_{\ell-1})$ であるときには必ず $D_{\varphi,\vec{b}} = D_{\widehat{\varphi},b}$ となるような，$FORM_{k+1}$ に属する論理式 $\widehat{\varphi}(\vec{x}, y)$ を書くことができる．□

記法の例示としていくつか簡単な事実を紹介します：$M^k \subseteq M$ であり $M^k \in \mathcal{D}_k^-(M)$ であること；函数 $x, y \mapsto (x, y)$ のグラフすなわち関係 $\{ (x,y,z) \in M^3 : z = (x,y) \}$ が M 上で（Δ_0 論理式によって）定義可能で $\mathcal{D}_3^-(M)$ に属すること；$b \in HF$ のときには $\{b\} \in \mathcal{D}_1^-(M)$ であり，また（論理式 $\exists y[x \in y \wedge \delta_b(y)]$ によって）$b \in \mathcal{D}_1^-(M)$ であること．$b \in M$ のときは b をパラメータとして用いることができるので $\{b\} \in \mathcal{D}_1^+(M)$ です．$|\mathcal{D}_1^-(M)| = \aleph_0$ なので，M が可算でないかぎり，M には $\{b\} \notin \mathcal{D}_1^-(M)$ となるような要素 $b \in M$ が存在することになります．

演習問題 IV.5.26　$b \in M$ であって，M は推移的だとする．したがって b も $\{b\}$ も M の部分集合である．このとき，$b \in \mathcal{D}_1^-(M)$ と $\{b\} \in \mathcal{D}_1^-(M)$ が同値であることを示しなさい．

さらに $HF \in \mathcal{D}_1^-(M)$ でもあります．HF は論理式 $\mathrm{HrdFin}(x)$ で定義されているからです．このことから，

補題 IV.5.27　M が CST の推移的モデルで，S が HF 上定義可能な HF^k の部分集合のとき，$S \in \mathcal{D}_k^-(M)$ である．

【証明】　HF に制限された量化は M において $\mathrm{HrdFin}(x)$ をみたす x 全体にわたる量化に書き換えられる．□

とくに HF^k の決定可能な部分集合はすべて $\mathcal{D}_k^-(M)$ に属することにな

り，したがって $FORM_k$ は $\mathcal{D}_1^-(M)$ に属します．

実を言うと，対を作る操作は定義可能なので，$\mathcal{D}_2^-(M) \subseteq \mathcal{D}_1^-(M)$ であり，$X \in \mathcal{D}_2^-(M)$ は $X \in \mathcal{D}_1^-(M)$ かつ $X \subseteq M \times M$ と同値です．同様に $\mathcal{D}_2^+(M) \subseteq \mathcal{D}_1^+(M)$ となります．このため，$\mathcal{D}^-$ と $\mathcal{D}^+$ の添数 $1, 2, \cdots$ をたびたび省略します．もしも X が順序対の集合であることが明白であるなら，$X \in \mathcal{D}_2^+(M)$ という意味で $X \in \mathcal{D}^+(M)$ と書きます．これを $X \in \mathcal{D}_1^+(M)$ と書いても同じ意味あいをもつからです．

定義 IV.5.28　M を CST の推移的モデルとするとき，$\mathrm{SAT}_0 = \mathrm{SAT}_0^M = \mathrm{Th}(M) = \{\varphi \in FORM_0 : M \vDash \varphi\} \subseteq FORM_0 \subseteq HF \subseteq M$，$\mathrm{SAT}_k = \mathrm{SAT}_k^M = \{(\varphi, \vec{a}) \in FORM_k \times M : M \vDash \varphi[\vec{a}]\} \subseteq FORM_k \times M^k \subseteq HF \times M \subseteq M$ $(1 \leq k < \omega)$ と定める．

これで真偽の定義不可能性を表現できるようになりました．これについて二つの異なる，しかし関連しあった結果が，本質的には同じ対角線論法で得られます．

定理 IV.5.29（タルスキの定理）　空でない推移的 M が CST をみたすとき

（a） $\mathrm{SAT}_0 \notin \mathcal{D}^-(M)$ と

（b） $\mathrm{SAT}_1 \notin \mathcal{D}^+(M)$

が，それぞれ成立する．

両者のうち (b) のほうがパラメータを使っても定義できないという強い主張をしているようですが，(a) より複雑な集合について言っていることには注意しましょう．SAT_1 を使って SAT_0 を定義するのは簡単で，たとえば $\varphi \in \mathrm{SAT}_0$ と $((\varphi \wedge x = x), \emptyset) \in \mathrm{SAT}_1$ とは同値になっています．SAT_0 が $\mathcal{D}^+(M)$ に属することはありえます．たとえば $\mathcal{P}(HF)$ が M の部分集合になっている場合には $\mathrm{SAT}_0 \in \mathcal{D}^+(M)$ になります．$M = HF$ の場合には，どの $b \in HF$ も $\delta_b(x)$ によって定義できるので $\mathcal{D}_k^+(M) = \mathcal{D}_k^-(M)$ であり，(a) と (b) は本質的に同じ言明ということになります．

【証明】　(b) について：定義から $\mathcal{D}_1^+(M) = \{D_{\varphi,b} : \varphi \in FORM_2 \wedge b \in M\}$ である．M の要素 u に対して E_u を，u が対 (φ, b) で φ が $FORM_2$ に属する論理式である場合は $E_u = D_{\varphi,b}$，そうでない限りは $E_u =$

$\emptyset$ と定義する．すると，$\mathcal{D}_1^+(M) = \{\, E_u \,:\, u \in M \,\}$ となる．補題 IV.4.1 で示したカントールの論法にしたがって，$\mathbb{D} = \{\, u \in M \,:\, u \notin E_u \,\}$ とおけば，$\mathbb{D} \notin \mathcal{D}^+(M)$ となる．ここで $u \in E_u$ となるのは

$$\exists \varphi \in \mathit{FORM}_2 \exists b \in M \,[\, u = (\varphi, b) \wedge (\varphi, u, b) \in \mathrm{SAT}_2 \,]$$

のときである．そこで $\mathrm{SAT}_2 \notin \mathcal{D}^+(M)$ である．そうでなければ $\mathbb{D}$ が $\mathcal{D}^+(M)$ に属することになるから．しかしそうすると $\mathrm{SAT}_1 \notin \mathcal{D}^+(M)$ である．これは FORM_2 に属する φ に対して論理式 $\exists x, y \,[\, \varphi(x, y) \wedge z = (x, y) \,]$ を $\widehat{\varphi}(z)$ とすることで $(\varphi, a, b) \in \mathrm{SAT}_2 \leftrightarrow (\widehat{\varphi}, (a, b)) \in \mathrm{SAT}_1$ となるからである．

この議論の最後のところでは，関係 $z = (x, y)$ が $\mathcal{L}$ の論理式で表現できるというあたりまえの事実と，そこまであたりまえでもないが，$\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ という函数が M 上で定義可能であるという事実とを用いた．この函数は計算可能であるから HF で定義可能であり，したがって M で定義可能でもある．

(a) を示す．$\mathrm{SAT}_0 \subseteq \mathit{HF}$ であるから，対角線論法を M ではなく HF の部分集合に対して使うが，議論したいのは HF ではなく M での定義可能性である．ここでの議論は，このあとの二つの補題でも用いられるので，ここで必要である以上に詳細に語ることにする．この論法はまた，パラドックス II.18.13 の（間違った）議論にも非常に似通っている．

第一段：$\mathcal{D}^*(M) = \mathcal{D}_1^-(M) \cap \mathcal{P}(\mathit{HF})$ とおく．つまり $\mathcal{D}^*(M)$ は HF の部分集合のうち M 上でパラメータを使わずに定義できるものの全体である．次に

$$G = \{\, (\varphi, a) \in \mathit{FORM}_1 \times \mathit{HF} \,:\, M \vDash \varphi[a] \,\}$$

と定義する．$G_u = \{\, a \,:\, (u, a) \in G \,\}$ とおく．すると $\mathcal{D}^*(M) = \{\, G_u \,:\, u \in \mathit{HF} \,\}$ となる．$\varphi \in \mathit{FORM}_1$ のときは $G_\varphi = \{\, a \in \mathit{HF} \,:\, M \vDash \varphi[a] \,\}$ であり，$u \notin \mathit{FORM}_1$ のときは $G_u = \emptyset$ である．$\mathbb{D} = \{\, u \in \mathit{HF} \,:\, u \notin G_u \,\}$ とおこう．すると $\mathit{HF} \setminus \mathit{FORM}_1 \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathit{HF}$ となる．$\mathbb{D} = G_\psi$ とすると $\psi \in G_\psi \leftrightarrow \psi \in \mathbb{D} \leftrightarrow \psi \notin G_\psi$ となって矛盾するので，$\mathbb{D} \notin \mathcal{D}^*(M)$ である．

第二段：$\mathrm{SAT}_0 \notin \mathcal{D}^-(M)$ である．なぜなら，もしも $\mathrm{SAT}_0 \in \mathcal{D}^-(M)$ であったとするなら，HF に属する φ について，$\varphi \in \mathbb{D}$ が $\varphi \notin \mathit{FORM}_1$（このとき $G_\varphi = \emptyset$）または $\varphi \in \mathit{FORM}_1$ かつ $\varphi(\ulcorner \varphi \urcorner) \notin \mathrm{SAT}_0$ と同値になって，

$\mathbb{D} \in \mathcal{D}^-(M)$ となってしまうからだ.

この第二段においては $\varphi \in FORM_1 \subseteq HF$ のときには論理式 $\exists x\,[\,\delta_\varphi(x) \wedge \varphi(x)\,]$ の略記としての $\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ を用いることができるというあたりまえの事実と，そこまであたりまえでもないが，$\varphi \mapsto \varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ が M 上で定義可能であるという事実とを用いた．この函数は計算可能であるから HF で定義可能であり，したがって M で定義可能でもある．□

次にあげる例はちょっと馬鹿げているようですが，対象をクォートする（引きあいに出す）操作の反復が意味をなすことの例示になっています．次の補題ではこうした反復が重要になるのです.

論理式 $\varphi(x,y)$ は，x が論理式で y が自然数で，x はちょうど y 個の自由変数をもつと言っているものとしましょう．すると，$\varphi(\ulcorner 5\urcorner,\ulcorner 3\urcorner)$ は $\exists x,y\,[\delta_5(x) \wedge \delta_3(y) \wedge \varphi(x,y)]$ という文の略記であり，この文は 5 が論理式でないので偽となります．いっぽう φ は論理式であり HF の要素でもあるので，$\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner,\ulcorner 2\urcorner)$（これは真）とか $\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner,\ulcorner\varphi\urcorner)$（これは φ が自然数でないから偽）といった文が得られます．ところがこれらはどちらも文であり HF の要素でもあるので，$\varphi(\ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner,\ulcorner 2\urcorner)\urcorner,\ulcorner 0\urcorner)$ も $\varphi(\ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner,\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner,\ulcorner 0\urcorner)$ も真な文であり，$\varphi(\ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner,\ulcorner 2\urcorner)\urcorner,\ulcorner 0\urcorner)\urcorner,\ulcorner 0\urcorner)$ も同様です.

定理 IV.5.29 の (a) を次のように肯定的な言明として言い直しておくと，ときに有用です.

補題 IV.5.30　$\theta \in FORM_1$ のとき，$FORM_0$ に属する γ を，CST のどんな推移的モデル M についても $M \models [\gamma \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)]$ となるようにとれる.

【証明】　M が固定されているのであれば，このような γ の存在は明らかだ．というのも，SAT_0 が θ によって定義されないことから，すくなくとも一箇所で $\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)$ と γ の真理値が逆になるはずだから．しかし，定理 IV.5.29 の証明を検討し，対角線論法の背後にある考え方をよく見れば，そうした γ を M に依存しない形で明示的に指定できる．定理 IV.5.29 の証明を逆にたどってみよう.

第二段：もしも θ で SAT_0 が定義できたとすれば,

$$\sigma(x,y) \leftrightarrow x \in FORM_1 \wedge \theta(x(\ulcorner y\urcorner))$$

とおくことですべての $u \in HF$ について $u \in \mathbb{D} \leftrightarrow \neg\sigma(u,u)$ となる．もちろん実際には θ は SAT_0 を定義しないわけだが，それでもこの σ を作ることはできる．もしも $\varphi \in FORM_1$ かつ $b \in HF$ であれば $\sigma(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner b\urcorner)$ は $\theta(\ulcorner\varphi(\ulcorner b\urcorner)\urcorner)$ と同値である．この σ を書き下すにあたって，ここでもまた，$(\varphi, b) \mapsto \varphi(\ulcorner b\urcorner)$ という函数が（計算可能であるがゆえに）M 上定義可能であることを用いる．なお，$\theta(\ulcorner\varphi(\ulcorner b\urcorner)\urcorner)$ というのは $\exists x\,[\,\delta_{\varphi(\ulcorner b\urcorner)}(x) \wedge \theta(x)\,]$ の略記にほかならない．

第一段： $\neg\sigma(x,x)$ を $\psi(x)$ とおく．そこで，（ありえないことだけれども）もしも θ が SAT_0 の定義式であったならば G_ψ が $\mathbb{D}$ ということになる．先ほどの「矛盾」$\psi \in G_\psi \leftrightarrow \psi \in \mathbb{D} \leftrightarrow \psi \notin G_\psi$ は，

$$\psi(\ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \neg\sigma(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\psi(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$$

が M において成立しているという事実にとって替わられる．いま $\psi(\ulcorner\psi\urcorner)$ を γ とおけば，$\gamma \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)$ となる．□

もしも ZFC において，集合 M で考えているのであれば，定理 IV.5.29 は SAT_0 や SAT_1 を定義するために M の外へ出てゆかねばならないことを意味します．それでは，$M = V$ の場合を考えればどうでしょうか．補題 IV.5.30 での $\gamma \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)$ の導出はこの場合も有効です．わたくしたちは V の外へ出てゆくことができないので，SAT_0 や SAT_1 を定義することはまったく断念せねばなりません．そうしたものを定義できると安直に仮定することで矛盾に陥ることはすでに見てきました（パラドックス II.18.13 と演習問題 II.18.14 を参照）．なにも ZFC にかぎらずより広い範囲の理論に，こうした矛盾が引き起こされます．補題 IV.5.30 の証明を検討してみましょう．$M = V$ の場合には $\gamma \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)$ の導出はモデルに関して何も触れることなくなされることに注意してください．文 γ をメタ理論におけるシンタクス的操作で作り，$ZFC \vdash \gamma \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)$ を示しただけです．この証明は有限集合のみを扱っていたので，同じ γ について次のことがいえます

補題 IV.5.31　言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ の自由変数を一つだけもつ任意の論理式を $\theta(x)$ とするとき，これに対して $\mathcal{L}$ の文 γ を $CST \vdash \gamma \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)$ となるようにとれる．

何かが CST から証明できればそれより強いあらゆる理論から同じことが証明できるのは当然です．ここで $\theta(x)$ が「x は真である」という意味をもつかどうかと考えれば，タルスキの定理の証明論バージョンが得られます．これは粗く言えば，論理の構文論を展開するのに十分な強さの理論においては，「x は真である」という意味をもつ論理式 $\theta(x)$ を**記述できない**のです．もしできたとすれば，$\gamma \leftrightarrow \neg\theta(\ulcorner\gamma\urcorner)$ となって矛盾しますから．これは嘘つきのパラドックスの一つのバージョンといえます．文 γ が「この文は偽である」と主張しているというわけです．

もしも $\theta(x)$ が「x は公理から証明可能である」という意味をもつとしたら，わたくしたちはそのような $\theta(x)$ を**記述できる**し，結果として得られる γ は「この文は証明できない」と主張することになります．これは矛盾を引き起こすかわりに，次の定理を生みます：

定理 IV.5.32（ゲーデルの第二不完全性定理）　Υ は CST の無矛盾な拡大で，文が Υ に属するかどうかの判定は Σ_1 であるものとする．このとき $\Upsilon \nvdash \mathrm{Con}(\Upsilon)$ である．よりフォーマルに言えば次のとおり：メタ理論における議論として Σ_1 論理式 $\upsilon(x)$ があって，$\Upsilon = \{\varphi : \upsilon(\varphi)\}$ は $\mathcal{L} = \{\in\}$ の文の集合であり，CST のすべての公理が Υ から証明可能になることがわかっているものとする．Υ あるいは CST の中で議論して，論理式 $\upsilon(x)$ から，υ をみたす文を公理として用いた矛盾のフォーマルな証明が存在しないと主張する $\mathcal{L}$ の文 $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ を作ることができる．さらに $\Upsilon \vdash \mathrm{Con}(\Upsilon)$ を仮定する．そのとき Υ は無矛盾でない．

証明に移る前に，（「よりフォーマルに言えば」の前に言った）インフォーマルな言明と（「よりフォーマルに言えば」以後の）厳密な言明とを比較しながら，この定理が言わんとしていることについてコメントしたいと思います．この点を理解するには，メタ理論における有限的な対象とフォーマルな理論におけるそれとの対応関係について，サブセクション I.7.2 やセクション III.2 で説明したことを，理解していなければなりません．

無矛盾性を主張する $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ を $\mathcal{L}$ の文とみるためには，わたくしたちは Υ のことを，文の集合ではなくその集合を定義する論理式 $\upsilon(x)$ と考えねばなりません．記法 IV.5.21 でもそうでしたが，文 $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ を形成するに用い

られるのはこの論理式 $v(x)$ なのです．いつものことながら，メタ理論は全面的に有限主義的であってよいので，Υ や ω のような無限集合の実在性を信じていなくても，定理とその証明を理解するのに支障はありません．こうした記号は有用な略記法なのです．もしも Υ が CST の拡大であることが検証でき，さらに Υ からの $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ の証明が見つかったならば，そのときは Υ からの矛盾の証明を構成できる，ということが定理の証明からわかります．

第一不完全性定理のときと同様，この定理のよく引き合いに出される実例（Υ が ZFC や ZC や $ZFC-P$ や PAS であるような例）においては，文が Υ に属するかどうかは実のところ決定可能（すなわち Δ_1）なのですが，定理の本来の証明においては Υ の Σ_1 な定義しか用いられません．

不完全性定理の哲学的解釈についてのいくつかの所見：Υ は CST と同等以上の強さをもつので，有限の組合せ論を通常どおり展開できます．ですから，この定理のインフォーマルな帰結として，Υ の無矛盾性は有限主義的な手段では（ということは，メタ理論においては）証明することができないことになります．それができたとしたら，その証明を形式化することで $\Upsilon \vdash \mathrm{Con}(\Upsilon)$ が得られ，Υ が無矛盾でないことになり，またその一方で Υ の無矛盾性が示されているという，ありえない事態になります．

また Υ が ZFC やそれより強い理論であった場合，第二不完全性定理は1920年代に推進された**ヒルベルトのプログラム** [61] に関連してきます．カントールの理論の記述した無限集合とか不可算集合といったものに（セクション III.1 で触れたように）疑念をもつ人々もありました．ヒルベルトの着想は，無限な対象が理想界に現に存在するのかどうかという哲学的な問いに答えることは不可能だけれども，形式主義の哲学に則ってあらゆることをなんらかの公理系 Υ の中で定式化してしまえば，数学の研究を続けることは可能だということでした．わたくしたちはこんにち Υ として ZFC を採用しているわけです．ところがヒルベルトは，Υ が無矛盾であることを有限主義的な手段で証明できればよいのだが，と構想しました．もちろん，1931年のゲーデルの定理により，このことが実現できないことをわたくしたちは知っているのですが，この構想はヒルベルトの当時には決して荒唐無稽な考えではありませんでした．同じような組合せ論的で有限主義的な議論は，よ

く知られているからです．たとえば φ と $\to\varphi\psi$ の長さがいずれも奇数であったならば，ψ の長さも奇数になります．仮に（論理の構文を少しばかり変更するなどして）論理の公理と Υ に属する公理のすべてについてその長さが奇数になることが確認できたとすれば，長さが 6 の $\neg\forall x{=}xx$ を導出することは絶対にできないわけです．

【定理 IV.5.32 の証明】 論理式 $\upsilon(x)$ から記法 IV.5.4 に述べられた Σ_1 論理式 $\mathrm{prv}_\Upsilon(x)$ を作る．この論理式は x が $\mathcal{L}$ の文であって $\Upsilon\vdash x$ である，と主張している．補題 IV.5.31 を適用して $\mathit{CST}\vdash(\gamma\leftrightarrow\neg\,\mathrm{prv}_\Upsilon(\ulcorner\gamma\urcorner))$ となるような文 γ をつくる．この文 γ は「自分は（Υ から）証明可能ではない」と主張している．

メタ理論において $\Upsilon\nvdash\gamma$ であることと Υ が無矛盾であることは同値となることに注意しよう．$\Rightarrow$ は当然で，矛盾した理論からは何だって証明できてしまう．$\Leftarrow$ を示すために $\Upsilon\vdash\gamma$ だったとすると Υ からの γ のフォーマルな証明である有限列 $\vec{\Phi}$ が存在する．仮定から $\Upsilon\supseteq\mathit{CST}$ であって「$\vec{\Phi}$ は Υ からの γ のフォーマルな証明である」という有限主義的言明は Υ から証明でき，したがって $\Upsilon\vdash\mathrm{prv}_\Upsilon(\ulcorner\gamma\urcorner)$ となる．ところがこのとき $\Upsilon\vdash\neg\gamma$ であるから，Υ は無矛盾でない．

さて，以上の有限主義的な議論そのものを Υ の中で定式化できて，$\Upsilon\vdash(\neg\,\mathrm{prv}_\Upsilon(\ulcorner\gamma\urcorner)\leftrightarrow\mathrm{Con}(\Upsilon))$ したがって $\Upsilon\vdash(\gamma\leftrightarrow\mathrm{Con}(\Upsilon))$ である．だからもしも $\Upsilon\vdash\mathrm{Con}(\Upsilon)$ であれば $\Upsilon\vdash\gamma$ であり，Υ は無矛盾でない．　□

第一および第二不完全性定理において Υ が Σ_1 であるという前提がどのように用いられたのかを指摘しておきましょう．第一定理においては単に Υ が完全であれば $\mathrm{Conseq}(\Upsilon)$ が Δ_1 であると結論するためでした．第二定理では，この前提にはもう少し深い理由がありました．文 $\mathrm{Con}(\Upsilon)$ を立てるために Σ_1 論理式 $\upsilon(x)$ を利用しました．さらに，文が Υ に属するかどうかが純粋な存在命題であるおかげで，$\Upsilon\vdash\gamma$ のときには Υ の中で考えて「$\Upsilon\vdash\gamma$」という文すなわち $\mathrm{prv}_\Upsilon(\ulcorner\gamma\urcorner)$ を証明できるということを示しました．第二定理の主張には，もう一つの暗黙の前提があります．それは，記法 IV.5.4 に述べられた論理式がいずれも 335 ページで言ったように「適切」であって，メタ理論において対応する概念をそのまま反映していると

いうことです．たとえば $\mathrm{sentseq}(\vec{\Phi})$ という Σ_1 論理式の場合であれば，$\mathcal{L}$ の文の有限列の全体を HF 上で正しく定義するという抽象的な再帰理論的事実にとどまらず，$\vec{\Phi}$ が実際にそうした列であった場合には必ず $CST \vdash \mathrm{sentseq}(\ulcorner\vec{\Phi}\urcorner)$ となってくれることも要求されます．このことは，$\vec{\Phi}$ が Υ からの γ のフォーマルな証明であったときに $\Upsilon \vdash \mathrm{prv}_{\Upsilon}(\ulcorner\gamma\urcorner)$ となるということの検証の一部分をなしているのです．

先に導入した $\mathcal{D}_1^+(M)$ の概念はゲーデルによる $ZFC + GCH$ の無矛盾性の証明に関わっています．累積階層 $R(\alpha)$（定義 I.14.1）とのアナロジーで，$L(\alpha)$ というものを次のように定義します．

（１）$L(0) = \emptyset$.

（２）$L(\alpha{+}1) = \mathcal{D}_1^+(L(\alpha))$.

（３）極限順序数 γ に対しては $L(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} L(\alpha)$.

（４）$L = \bigcup_{\delta\in ON} L(\delta) =$ **構成可能的集合**全体のクラス.

この定義と $R(\alpha)$ の定義の違いは(2)だけで，$L(\alpha+1)$ は $L(\alpha)$ の冪集合そのものではなく，$L(\alpha)$ 上で $L(\alpha)$ からのパラメータを使って定義可能な部分集合だけを集めたものです．ゲーデルは ZF で考えて，L が $ZFC + GCH$ のすべての公理をみたす推移的な真クラスであることを証明しました．いま $ZFC + GCH$ が矛盾を含むと仮定して $ZFC + GCH \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ とすれば，ZF も矛盾を含むことになります．なぜなら，ZF で考えて $\varphi^L \wedge \neg\varphi^L$ を導くことができるからです．詳しくは [34,41] を参照しなさい．

この $L(\alpha)$ についての議論のはじめのところは $R(\alpha)$ の場合と密接に並行しています：

演習問題 IV.5.33　ZFC において次のことを証明しなさい：$\alpha \leq \omega$ のとき $L(\alpha) = R(\alpha)$ であり，しかしながら $|L(\omega+1)| = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = |R(\omega+1)|$ である．さらに，どの $L(\alpha)$ も推移的で $L(\alpha) \cap ON = \alpha$ であることを証明しなさい．

第二不完全性定理を無矛盾であるとわかっている理論に適用するのも有意義です．たとえば ZFC で考えることにして，

演習問題 IV.5.34　$\mathfrak{B} = (B; E)$ を $ZFC - P + \neg\,\mathrm{Con}(ZFC - P)$ のモデ

ルとする．この理論は第二不完全性定理により無矛盾である．そこで，$\mathfrak{B}$ にとって $ZFC-P$ からの矛盾の証明になっている $\vec{\Phi} \in B$ がとれる．したがって $\mathfrak{B}$ 内で考えると $\vec{\Phi}$ はある長さ m の文の有限列であり，$\vec{\Phi}$ にあらわれる文のうちで最長のものの長さを n をとることができる．この m か n の少なくとも一方が超準自然数であることを証明しなさい．

［ヒント］ ZFC で考えているので $H(\aleph_1) \models ZFC-P$ から $ZFC-P$ が無矛盾であることがわかる．もしも m と n がともに標準要素であれば，$\vec{\Phi}$ は本物の $ZFC-P$ からの矛盾の証明に同定されるが，それはありえない．□

ここでの $\mathfrak{B}$ と，演習問題 II.18.16 で $H(\kappa)$ の真の初等拡大として与えた $\mathfrak{A}$ の違いに注目しましょう．この $\mathfrak{A}$ も超準自然数を含みます．$\mathrm{Con}(ZFC-P)$ は真であり，$H(\kappa)$ は推移的モデルなので，$H(\kappa) \models \mathrm{Con}(ZFC-P)$ であることは簡単な絶対性の論法でわかります．したがって $\mathfrak{A} \models \mathrm{Con}(ZFC-P)$ です．

演習問題 IV.5.34 の $\vec{\Phi}$ はどんな風に見えるのでしょうか．超準な長さの論理式とは超準自然数の型に全順序づけされた記号の列ですから，本物の論理式に同定されようがありません．同様に，$\vec{\Phi}$ が超準の長さをもてば，たとえ $\vec{\Phi}$ が有限な長さの論理式ばかりからなるとしても，それを（必ず有限の長さをもたねばならない）本物のフォーマルな演繹と同定することはできません．

実のところ，演習問題 IV.5.34 の n が超準要素でなければならないこと，すなわち $\vec{\Phi}$ が超準論理式を含まねばならないことを示せます．これは $ZFC-P$ の任意の有限部分 S について $ZFC-P \vdash \mathrm{Con}(S)$ となるという事実からたやすく導かれます．これに対応する ZFC での事実は反映定理（演習問題 II.18.15 参照）によって証明できます．S が ZFC の有限部分であれば，$ZFC \vdash \exists\alpha\,[\,R(\alpha) \models S\,]$ となるからです．これと同様に，S が $ZFC-P$ の有限部分であれば $ZFC-P \vdash \exists\alpha\,[\,L(\alpha) \models S\,]$ となるのです．

演習問題 IV.4.16 とそれに先立つ議論においてクリーネの第一再帰定理に簡単に触れました．この定理は，コンピュータのプログラミングについての一つのありふれた事実，すなわち $f(y)$ を計算するプログラムは f を好きなように呼び出してよいが，その結果得られるのは部分計算可能函数にすぎないかもしれない，という事実を定式化するものでした．第二再帰定理はもっ

と深遠で，f を計算するためのプログラム P が f だけでなく P そのものを利用しうるという主張です．たとえば，プログラム P に自然数 y を入力すると，（実態としてはバイト列である）P 自身の y 番目のバイトを出力する（あるいは $y \geq \mathrm{lh}(P)$ の場合は 0 を返す）ように，プログラム P を書くことができるのです．第一再帰定理と違って，これはプログラミングの初級コースで学ぶどんな事実にも対応しません．

わたくしたちの枠組みの中で厳密にこの定理を述べるために，プログラムによって定義される函数の代わりに Σ_1 関係を使うことにします．

演習問題 IV.5.35（第二再帰定理）　$FORM_3$ に属する Σ_1 論理式 $\theta(x, y, z)$ をとろう．これに対して $FORM_2$ に属する Σ_1 論理式 $\gamma(y, z)$ を，HF 上で文 $\forall y, z\,[\,\gamma(y, z) \leftrightarrow \theta(\ulcorner\gamma\urcorner, y, z)]$ が真になるようにとれる．

［ヒント］　補題 IV.5.30 と IV.5.31 においては，$\neg\theta$ を使うのが応用上自然な流れではあったものの，$\neg\theta$ を θ に書き換えてもなんらさしつかえなかったことに，まず注意しよう．次にその θ が Σ_1 であったならば，γ として自然に得られる文も Σ_1 となることを見る．それから，ほぼ同じ証明で，θ がいくつかの自由変数を含む場合の結果が得られることに注意する．　□

ここで θ が 2 変数の部分計算可能函数 g を定義するものとしましょう．つまりどんな x と y についても $\theta(x, y, z)$ は高々 1 個の z についてしか成立しないとします．すると，γ は 1 変数の部分計算可能函数 f のグラフを定めることになります．g が全域であれば f も必然的にそうなります．最初の例に戻って，$x \in HF^{<\omega}$ で $y < \mathrm{lh}(x)$ のとき $g(x, y)$ は x の y 番目の要素を返し，それ以外の場合には $g(x, y) = 0$ となるものとしましょう．このとき γ はある函数 f を定めますが，$y < \mathrm{lh}(\gamma)$ のときには $f(y)$ は論理式 γ の y 番目に出現する記号になります．

このような γ を（コンピュータの助けを借りるのがよいでしょうが）わたくしたちの正式なポーランド記法で書き下してみるのは，よい演習になることでしょう．

参考文献

[1] W. Ackermann, Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre, *Mathematische Annalen* 114 (1937) pp.305–315.

[2] ACL2 Version 7.2 home page, `http://www.cs.utexas.edu/~moore/acl2/`

[3] Aristotle, *Prior Analytics*, ∼350 BC; English translation: `http://classics.mit.edu/Aristotle/prior.html`〔邦訳： アリストテレス「分析論前書」(井上忠 訳),『アリストテレス全集 第 1 巻』(岩波書店, 1971 年) 所収〕

[4] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer-Verlag, 1975.

[5] P. Benacerraf and H. Putnam, editors, *Philosophy of Mathematics,* selected readings, second edition. Cambridge University Press, 1983.

[6] A. Blass, Existence of bases implies the axiom of choice, *Axiomatic set theory,* Contemp. Math., 31, Amer. Math. Soc., 1984, pp.31–33.

[7] G. Boole, *The Laws of Thought,* Macmillan, 1854; Dover Publications, 1968.

[8] J. R. Brown, *Philosophy of Mathematics,* Routlegde, 1999.

[9] R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems,* Springer-Verlag, 1971.

[10] S. Buechler, *Essential Stability Theory,* Springer-Verlag, 1996.

[11] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra,* Springer-Verlag, 1981; see also `http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html`

[12] A. Cayley, *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley,* 13 vols., A. R. Forsyth, ed. The University Press, Cambridge, 1889–1897.

[13] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory,* Third Edition, North-

Holland Publishing Co., 1990.

[14] C. L. Chang and R. C. T. Lee, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving,* Academic Press, 1973.〔邦訳：Chang, Lee『コンピュータによる定理の証明』(長尾真・辻井潤一 訳)，日本コンピュータ協会，1983 年〕

[15] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 50 (1963) 1143–1148.

[16] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, II, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 51 (1964) 105–110.

[17] B. J. Copeland, The Church-Turing thesis, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2002), `http://plato.stanford.edu/entries/church-turing/`

[18] Coq homepage, `http://coq.inria.fr/`

[19] N. Cutland, *Computability, An introduction to recursive function theory,* Cambridge University Press, 1980.

[20] J. W. Dauben, *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* Princeton University Press, 1979.

[21] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke, Dritter Band,* Fricke, Noether, Ore, 1932; see `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235685380`

[22] A. Dumitriu, *History of Logic,* Abacus Press, 1977.

[23] G. Etesi and I. Németi, Non-Turing computations via Malament-Hogarth space-times, *Internat. J. Theoret. Phys.* 41 (2002) 341–370.

[24] Euclid, *Elements,* ~300 BC; English translation: `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`〔邦訳：『ユークリッド原論 追補版』(中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵 訳)，共立出版，2011 年〕

[25] M. Fitting, *Incompleteness in the Land of Sets,* College Publications, 2007.

[26] A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengen-

lehre, *Math. Ann.* 86 (1922) 230–237.

[27] D. Gabbay and J. Woods, eds., *Handbook of the History of Logic,* Elsevier, 2004.

[28] Galileo Galilei, *Dialogue Concerning Two New Sciences,* 1638; English translation: `http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/tns\_draft/index.html`〔邦訳：ガリレオ・ガリレイ『新科学対話（上・下）』（今野武雄・日田節次 訳），岩波文庫，1937 年〕

[29] A. George and D. J. Velleman, *Philosophies of Mathematics,* Blackwell Publishers, Inc., 2002.

[30] M. Goldstern and H. Judah, *The Incompleteness Phenomenon,* A K Peters, Ltd., 1995.

[31] M. Grohe, Finite variable logics in descriptive complexity theory, *Bull. Symbolic Logic* 4 (1998) 345–398.

[32] L. Henkin, The completeness of the first-order functional calculus, *J. Symbolic Logic* 14 (1949) 159–166.

[33] D. Hilbert and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik,* Springer 1928.〔邦訳：ヒルベルト・アッカーマン『記号論理学の基礎（改訂最新版）』（石本新・竹尾治一郎 訳），大阪教育図書，1974 年〕

[34] P. Howard and J. E. Rudin, *Consequences of the Axiom of Choice,* American Mathematical Society, 1998.

[35] Isabelle home page, `http://isabelle.in.tum.de/index.html`

[36] T. Jech, *Set Theory,* 2nd Edition, Springer, 1996.

[37] T. Jech, *The Axiom of Choice,* North-Holland Pub. Co., 1973.

[38] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory,* Springer-Verlag, 1995.

[39] M. K. Kinyon, K. Kunen, and J. D. Phillips, Every disassociative A-loop is Moufang, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 130 (2002) 619-624.

[40] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics,* D. Van Nostrand Co., 1952.

[41] K. Kunen, *Set Theory,* North-Holland Pub. Co., 1980.〔邦訳：ケネス・キューネン『集合論』（藤田博司 訳），日本評論社，2008 年〕

[42] C. Kuratowski, Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles, *Fundamenta Mathematicae* 2 (1921) 161–171

[43] E. Landau, *Grundlagen der Analysis* (das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen), Chelsea Publishing Co., 1960.

[44] N. Luzin, Function, I (Translated by A. Shenitzer), *Amer. Math. Monthly* 105 (1998) 59–67.

[45] N. Luzin, Function, II (Translated by A. Shenitzer), *Amer. Math. Monthly* 105 (1998) 263–270.

[46] D. Marker, *Model Theory, An Introduction,* Springer-Verlag, 2002.

[47] Mizar home page, `http://mizar.org/`

[48] W. W. McCune, *OTTER 3.3 Reference Manual,* Argonne National Laboratory Technical Memorandum ANL/MCS-TM-263, 2003, available at: `http://www.cs.unm.edu/~mccune/otter/`

[49] W. W. McCune, *Prover9* web site: `http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/`

[50] M. Morley, The number of countable models, *J. Symbolic Logic* 35 (1970) 14–18.

[51] Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory,* North-Holland Publishing Co., 1980.

[52] Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory,* Second Edition, American Mathematical Society, 2009.

[53] William of Ockham, *Summa Logicae,* ∼1325, edited by P. Boehner, G. Gál, and S. Brown, St. Bonaventure, 1974; excerpts on line at `http://host.uniroma3.it/progetti/kant/online/estratti/o/ockham.html`

[54] G. Peano, *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita,* 1889, available on line at `http://books.google.com/books`

[55] Plato, *Meno,* ∼380 BC; English translation on line at: `http://clasics.mit.edu/Plato/meno.html` 〔邦訳：プラトン『メノン』藤沢令夫 訳，岩波文庫，1994 年／渡辺邦夫 訳，光文社古典新訳文庫，2012 年〕

[56] W. V. O. Quine, *Methods of Logic,* Henry Hold & Company, 1950.
〔邦訳： W. V. O. クワイン『論理学の方法』（中村秀吉・大森荘蔵・藤村龍雄 訳），岩波書店，1961 年〕

[57] J. C. Shepherdson and H. E. Sturgis, Computability of recursive functions, *J. Assoc. Comput. Mach.* 10 (1963) 217–255.

[58] R. M. Smullyan, *Theory of Formal Systems,* Annals of Mathematics Studies, No.47, Princeton University Press, 1961.

[59] K. D. Stroyan and W. A. J. Luxemburg, *Introduction to the Theory of Infinitesimals,* Academic Press, 1976.

[60] M. D. Weir, J. Hass, and F. R. Giordano, *Thomas' Calculus,* 11th edition, Pearson Addison Wesley, 2005.

[61] R. Zach, Hilbert's Program, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2003 Edition), E. N. Zalda editor, `http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/hilbert-program/`

[62] E. N. Zalda, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy,* `http://plato.stanford.edu/`

[63] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I., *Math. Ann.* 65 (1908) 261–281.

訳者あとがき

本書は，Kenneth Kunen 著，*The Foundations of Mathematics*（College Publications，2009 年）の全訳です．著者ケネス・キューネンは，名著『集合論——独立性証明への案内』の著者としてつとに名高い方です．ウィスコンシン大学でのロジック（数理論理学と数学基礎論）の講義ノートを基にして，数理論理学の入門的なトピックを広く浅く，しかし大変ていねいに解説したものになっております．

著者がセクション 0.3 で自ら述べているとおり，本書はロジックの入門書として，ロジック専攻をめざす学生のみなさんのほか，位相数学や抽象代数学などを専攻する数学者，あるいは数学の哲学を研究する哲学者のみなさんが，研究上の必要上ロジックを勉強することになった場合に，その入門書として役立てていただくことを目標としています．集合論，モデル理論，計算の理論の初歩の部分，とくに公理的集合論（第 I 章）と，完全性定理の証明（第 II 章）とを周到に展開し，また不完全性定理（第 IV 章）をも扱っています．集合論の高度な話題たとえば強制法による独立性証明などには触れていませんが，この本を読み終えれば，より高度な集合論やモデル理論を学ぶにあたっての準備は十分に整うといえます．

原書のタイトルを直訳すると「数学の基礎」ですが，これをそのまま訳書のタイトルとしたのでは，高等学校・大学での数学の基礎課程である微分・積分や線形代数あるいは集合・位相といったコースを連想させてミスリーディングでしょう．日本で「数学基礎論」の名で研究されている内容と比較すると，証明論より集合論とモデル論が話題の中心に置かれていることなど，ウェイトの置き方に違いがありますので，シンプルに「数学基礎論」をタイトルとすることも適切とは思えませんでした．第 1 章の集合論の基礎に関する見解，第 3 章での哲学的な議論や第 4 章の計算論の理論展開などに，キューネン独自の観点が見られることも考えて，訳書のタイトルを「キューネン数学基礎論講義」といたしました．

本文中に散在している演習問題については，現在のところ，公式解答集といえるものがどこにも存在しません．しかしながら，前著『集合論——独立性証明への案内』と同様，本書についても，訳者の Web サイト「なげやりアカデミア」においてサポートしていきたいと考えております．

最後になりましたが，翻訳にさいして，嘉田勝さん，河野友勝さん，株式会社メダカカレッジの梵天ゆとりさん，宮谷和尭さん，その他たくさんのみなさんに原稿を読んでいただき数多の助言をいただきました．日本評論社の飯野玲さんには企画の段階からすべてにおいてお世話になりました．この場を借りて御礼申し上げます．

記号索引

第 II 章

第 IV 章

事項索引

ま

や

ら

わ

著◉ケネス・キューネン（Kenneth Kunen）

1943年生まれ，ウィスコンシン大学マディソン校名誉教授．

訳◉藤田博司（ふじた・ひろし）

1964年 京都府生まれ．
1987年 立命館大学理工学部数学物理学科 卒業．
1991年 名古屋大学大学院理学研究科博士後期課程中退．
現在，愛媛大学理学部特任講師．
専門は記述集合論．

著書に『魅了する無限』（技術評論社，2009），
訳書に『集合論』（ケネス・キューネン著，日本評論社，2008）
がある．

キューネン 数学基礎論講義（すうがくきそろんこうぎ）

2016年 7月30日 第1版第1刷発行

著　者	ケネス・キューネン
訳　者	藤　田　博　司
発行者	串　崎　　浩
発行所	株式会社 日本評論社
	〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
	電話　(03) 3987-8621［販売］
	(03) 3987-8599［編集］
印　刷	藤原印刷株式会社
製　本	株式会社難波製本
装　幀	海保　透

ISBN978-4-535-78748-3